CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 16 (25 au 30 janvier 2026)

Chapitres étudiés et questions de cours :

E4 Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi (début) : impédances complexes équivalentes à calculer, application loi des mailles, loi des nœuds, diviseurs etc …, résolution équation différentielles, résonances en intensité et en tension ; avec grandeurs complexes.

MF1 Statique des fluides

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : questions 1 à 3.

2ème question de cours : questions 4 à 11.

1) Donner la grandeur complexe, l'amplitude complexe, l'amplitude, la phase et la phase à l'origine associées à la grandeur réelle harmonique $u(t) = U_m cos(\omega t+\phi)$.

   Donner la grandeur réelle harmonique associée à l'amplitude complexe de module I_m et d'argument ϕ, la pulsation étant ω.

Réponse attendue : Grandeur complexe $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\phi)}$; Amplitude complexe $\underline{U} = U_m e^{j\phi}$; Amplitude U_m ; Phase $\omega t + \phi$; Phase à l'origine ϕ

Réponse attendue : $i(t) = I_m.cos(\omega t+\phi)$

2) Donner les expressions de l'impédance complexe $\underline{Z}$ et de l'admittance complexe $\underline{Y}$ d'une résistance, d'une bobine parfaite, d'un condensateur. Donner la signification (ou interprétation physique) du module de $\underline{Z}$ et de l'argument de $\underline{Z}$.

Impédance complexe : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{u(t)}}{\underline{i(t)}}$

Module de $\underline{Z}$: $|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U_{max}}{I_{max}}$

Argument de $\underline{Z}$: $Arg(\underline{Z}) = Arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = Arg(\underline{U}) - Arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i$ Déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.

Admittance complexe : $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\underline{i(t)}}{\underline{u(t)}}$

Résistance : $\underline{Z_R} = R$; $\underline{Y_R} = \frac{1}{R}$

Bobine parfaite : $\underline{Z_L} = jL\omega$; $\underline{Y_L} = \frac{1}{jL\omega}$

Condensateur : $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Y_C} = jC\omega$

3) Donner la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides.

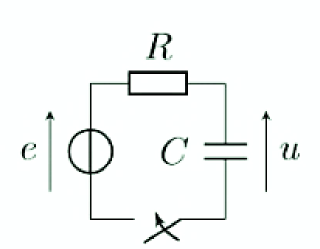
Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\overrightarrow{grad}(p) = \rho\vec{g}$$

$\frac{dp}{dz} = -\rho . g$ si z orienté vers le haut (verticale ascendante)

$\frac{dp}{dz} = +\rho . g$ si z orienté vers le bas (verticale descendante)

4) Résoudre une équation différentielle par la méthode complexe :



L'équation différentielle vérifiée par u s'écrit, pout $t > 0$:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e(t) \qquad \text{avec} \quad e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On cherche une solution particulière sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi')$.

1. Ecrire cette équation différentielle en faisant apparaître les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{E}$.
2. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $\underline{U}$.
3. *En* déduire l'expression de U_m et du déphasage $\varphi' - \varphi$.

1. 2. $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi')}$ / $\underline{U} = U_m e^{j\varphi'}$ / $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$

$\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ / $\underline{E} = E_m e^{j\varphi}$ / $\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$

$\frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega \underline{u}(t) = j\omega \underline{U} e^{j\omega t}$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e$$

$$\Rightarrow j\omega \underline{u}(t) + \frac{1}{\tau}\underline{u}(t) = \frac{1}{\tau}\underline{e}(t)$$

$$\Rightarrow j\omega \underline{U}\cancel{e^{j\omega t}} + \frac{1}{\tau}\underline{U}\cancel{e^{j\omega t}} = \frac{1}{\tau}\underline{E}\cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\Rightarrow \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{U} = \frac{1}{\tau}\underline{E}$$

d'où : $\underline{U} = \frac{\frac{1}{\tau}}{j\omega + \frac{1}{\tau}}\underline{E} = \frac{1}{j\tau\omega + 1}\underline{E}$

$$\underline{U} = \frac{1}{1+j\tau\omega}\underline{E}$$

3. $U_m = |\underline{U}| = \frac{1}{|1+j\tau\omega|}|\underline{E}| = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}E_m$

et

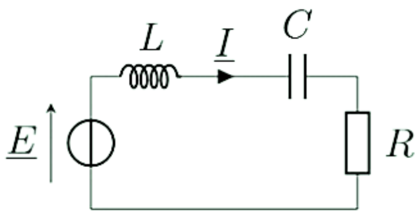
$\varphi' = \arg(\underline{U}) = \arg\left(\frac{1}{1+j\tau\omega}\underline{E}\right)$

$= \arg 1 + \arg(\underline{E}) - \arg(1+j\tau\omega)$

d'où $= 0 + \varphi - \arctan(\tau\omega)$

$\varphi' - \varphi = -\arctan(\tau\omega)$

5) Résonance en intensité du circuit RLC série.



1. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}}$ en fonction de R, L, C et ω.
2. Mettre cette expression sous la forme canonique suivante :

$$\underline{Y} = \frac{\frac{1}{R}}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$$ avec x pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Déterminer les expressions de ω_0 et Q (identification).

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On identifie à $\underline{Y} = \frac{\frac{1}{R}}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} = \frac{\frac{1}{R}}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\frac{1}{R}}{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0} - jQ\frac{\omega_0}{\omega}}$

D'où : $j\frac{L\omega}{R} = jQ\frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad$ *ou encore* : $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$ (1)

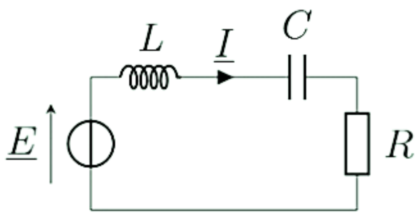
et $\frac{1}{jRC\omega} = \frac{-j}{RC\omega} = -jQ\frac{\omega_0}{\omega}$ $\quad$ *ou encore* : $\frac{1}{RC} = Q\omega_0$ (2)

On résout :
par exemple :

en multipliant (1) *et* (2), *on obtient* : $\boldsymbol{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

en divisant (2) *par* (1), *on obtient* : $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

6) Résonance en intensité du circuit RLC série.
On donne l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité $i(t)$:



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\frac{\underline{E}}{R}}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \quad avec\ x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

1. Déterminer l'expression de l'amplitude de l'intensité $I_m = |\underline{I}|$.
2. Déterminer la pulsation de résonance ω_R.
3. Donner l'allure de I_m en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1. $I_m = |\underline{I}| = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$
2. Résonance :

   I_m passe par un maximum,

   $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$,

   $x = x_R = 1$ ou $\boldsymbol{\omega = \omega_R = \omega_0}$

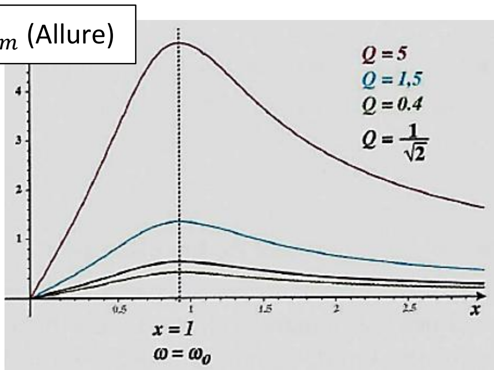
3. Etude aux limites :

$x \to 0 \Rightarrow I_m \to 0$

$x \to \infty \Rightarrow I_m \to 0$

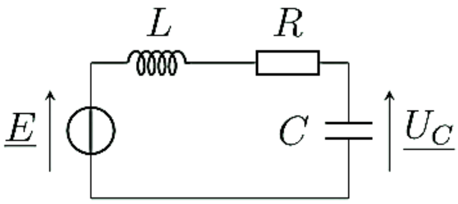
$x \to 1 \Rightarrow I_m = \frac{E}{R}$

I_m (Allure)



7) Résonance en tension aux bornes du condensateur :

1. Etablir la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{U_C}}{\underline{E}}$ en fonction de *R*, *L*, C et ω.
2. Mettre cette expression sous la forme canonique suivante :



$\underline{T} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ avec x pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Déterminer les expressions de ω_0 et Q (identification).

$$\underline{T} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On identifie à : $\underline{T} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ avec x pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

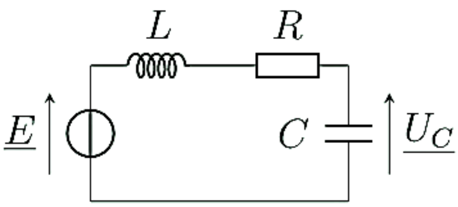
Par identification, on obtient :

$$\boldsymbol{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

8) Résonance en tension aux bornes du condensateur : A partir de l'expression de l'amplitude de la tension $U_{CM} = \left|\underline{U_C}\right|$ en fonction de la pulsation réduite x :

$$U_{CM} = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$



1. Déterminer la condition de résonance en élongation.

2. Tracer l'allure de la courbe U_{CM} en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

On s'intéresse aux variations de U_{CM} en fonction de x.

Le numérateur de U_{CM} est une constante positive, on peut donc simplifier l'étude en étudiant le dénominateur de U_{CM}, et même le carré de celui-ci.

On définit $\quad D(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$; $\quad$ de sorte que $\quad U_{CM} = \frac{E}{\sqrt{D(x)}}$

L'amplitude est alors maximale pour une fréquence telle que le dénominateur $D(x)$ est minimal.

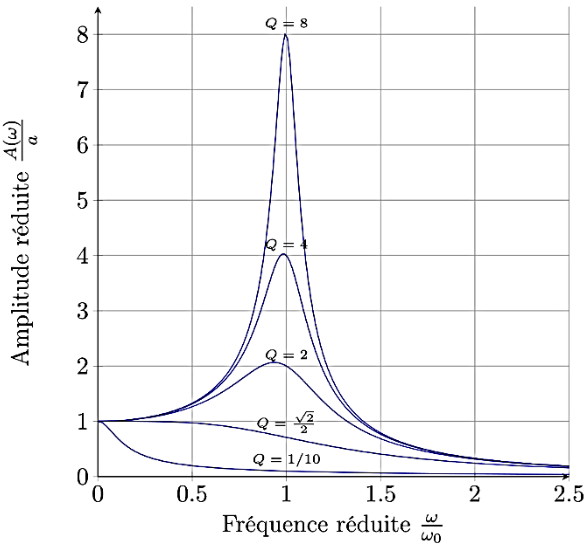
Il faut donc chercher la pulsation réduite x telle que $\quad \frac{dD}{dx} = 0$

$$\frac{dD}{dx} = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2}{Q}\,\frac{x}{Q} = 4x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

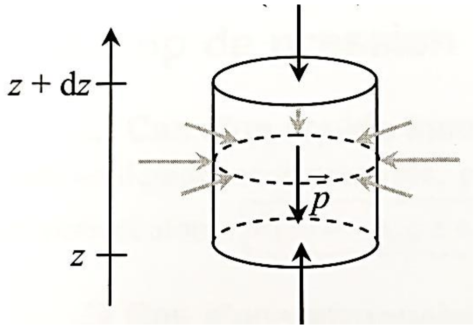
$$\frac{dD}{dx} = 4\,x\left(x^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) = 0$$

$\frac{dD}{dx}$ s'annule en $x = 0$ et, **éventuellement**, selon le signe de $1 - \frac{1}{2Q^2}$, en $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$:

- Si $1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ impossible $\Leftrightarrow$ **Pas de résonance en tension aux bornes du condensateur**
- Si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ possible $\Leftrightarrow$ **Résonance en tension aux bornes du condensateur**



9) Statique des fluides : A partir d'un Bilan des Actions Mécaniques Extérieures sur un l'élément de fluide ci-contre, établir l'expression de la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides.



Elément de volume d'axe vertical, de section *dS* et de hauteur *dz* :

Hypothèse : *dz* << *z*

$\rho(z)$ masse volumique à l'altitude *z*

$\rho(z) = cte$ dans le cyclindre

$p(z)$ pression à l'altitude *z*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) s'exerçant sur le cylindre :

- Poids du cylindre :

$$\overrightarrow{dP} = dm.\vec{g} = \rho.dV.\vec{g} = -\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z}$$

- Les forces de pression sur les surfaces latérales se compensent
- Forces de pression sur les surfaces haute et basse :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) = p(z).dS.\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{dF_S}(z+dz) = -p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z}$$

- Principe Fondamental de la Statique :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF_S}(z) + \overrightarrow{dF_S}(z+dz) = \vec{0}$$
$$-\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z} + p(z).dS.\overrightarrow{e_z} - p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$$

- Projection sur l'axe *z* :

$$-\rho.dz.g + p(z) - p(z+dz) = 0$$
$$p(z+dz) - p(z) = -\rho.g.dz$$
$$dp = -\rho.g.dz$$

- Différenciation :

$$\frac{dp}{dz}.dz = -\rho.g.dz$$

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dz} = -\rho.g}$$ **Relation Fondamentale des la statique des Fluides (pour axe z gradué vers le haut)**

10) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho.g$, établir l'expression de la pression p en fonction de l'altitude z dans le cas d'un liquide incompressible.

Fluide incompressible = Fluide dans lequel la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ est indépendante de la pression ***p*** et de l'altitude ***z***.

Hypothèse : $\boldsymbol{\rho = constante = \rho_0}$

$$\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0.g$$

On intègre :

$$p(z) = -\rho_0 . g . z + cte$$

Condition aux Limites (C.L.) :

$$p(0) = cte = p_0$$

D'où :

$$\boldsymbol{p(z) = -\rho_0 . g . z + p_0}$$

Ou on intègre par variables séparées :

$$dp = -\rho_0 . g . dz$$

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_0^z -\rho_0 . g . dz$$

$$[p]_{p_0}^{p} = -\rho_0 . g . [z]_0^z$$

$$\boldsymbol{p - p_0 = -\rho_0 . g . z}$$

Autres écritures possibles :

$$\boldsymbol{p_1 + \rho . g . z_1 = p_2 + \rho . g . z_2}$$

$$\boldsymbol{p_{bas} = p_{haut} + \rho . g . h}$$

avec $\boldsymbol{\rho} = constante$ (fluide incompressible)

11) (Etudié en autonomie par les étudiants) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho . g$, établir l'expression de la pression p en fonction de l'altitude z dans le cas d'un gaz parfait isotherme. Définir la hauteur caractéristique H et vérifier l'homogénéité du résultat.

Hypothèse : $\boldsymbol{T = constante = T_0}$

$pV = nRT$ d'où : $V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT_0}{p}$

Masse volumique du gaz : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT_0} = \frac{Mp}{RT_0}$ avec $M = \frac{m}{n}$ masse molaire du gaz

$\frac{dp}{dz} = -\rho . g$ devient :

$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{RT_0} = -\frac{Mg}{RT_0} p$

En séparant les variables :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0}dz$$

Intégration par variables séparées :

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT_0}dz = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z dz$$

$$[lnp]_{p_0}^{p} = -\frac{Mg}{RT_0}[z]_0^z$$

$$lnp - lnp_0 = ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0}z$$

$$\boxed{\boldsymbol{p = p_0 . \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right) = p_0 . \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}}$$

avec $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{RT_0}}{\boldsymbol{Mg}}$ **Hauteur caractéristique**

Homogénéité :

$$[H] = \left[\frac{RT_0}{Mg}\right] = \left[\frac{mRT_0}{Mmg}\right] = \left[\frac{nRT_0}{mg}\right] = \frac{J}{N} = \frac{N.m}{N} = m$$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

14. Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi	
Signal sinusoïdal Pulsation et fréquence. Amplitude, phase. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal	Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement (convention $e^{j\omega t}$).
Impédances complexes, association de deux impédances. Impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine. Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal établi. Tension efficace. Intensité efficace. Facteur de puissance.	Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace, de l'intensité efficace et du facteur de puissance. Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.
Transport d'énergie électrique.	Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique. Analyser l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.
Circuit RLC série en régime sinusoïdal établi. Résonance de courant. Facteur de qualité.	Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe. Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence. Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit. **Mettre en évidence le phénomène de résonance de courant dans un circuit RLC série et estimer la valeur du facteur de qualité.**

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Description d'un fluide statique	
Échelle mésoscopique.	Définir et connaitre des ordres de grandeurs des dimensions de l'échelle mésoscopique dans le cas des liquides et des gaz.
Champ de pression dans un fluide. Force de pression.	Citer des ordres de grandeur de valeurs de pression dans des situations usuelles. Calculer la force de pression s'exerçant sur une surface, la pression étant uniforme.
Forces volumiques associées à un champ de pression non uniforme. Opérateur gradient.	Démontrer l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide dans le cas d'une variation unidirectionnelle de la pression. Généraliser sans démonstration pour une situation quelconque en utilisant l'opérateur gradient. Exploiter l'expression générale admise de la force volumique associée aux forces de pression, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie.
Relation de la statique des fluides.	Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur, supposée uniforme.
Pression dans un fluide incompressible. Pression dans une atmosphère isotherme.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible. Citer une application pratique. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'une atmosphère isotherme assimilée à un gaz parfait. **Capacité numérique :** mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler l'évolution de la pression pour une atmosphère non isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait.
Poussée d'Archimède	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Citer et exploiter l'expression de la poussée d'Archimède.