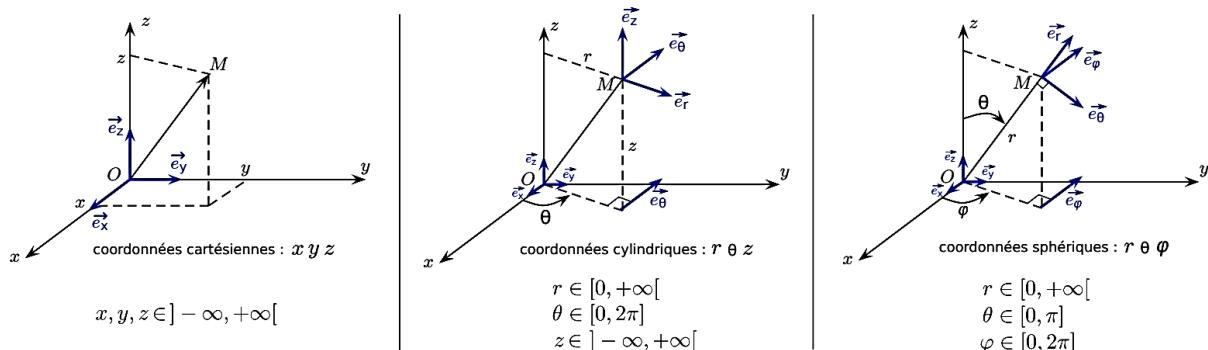


ANALYSE VECTORIELLE (1)

Merci à M. Melzani !

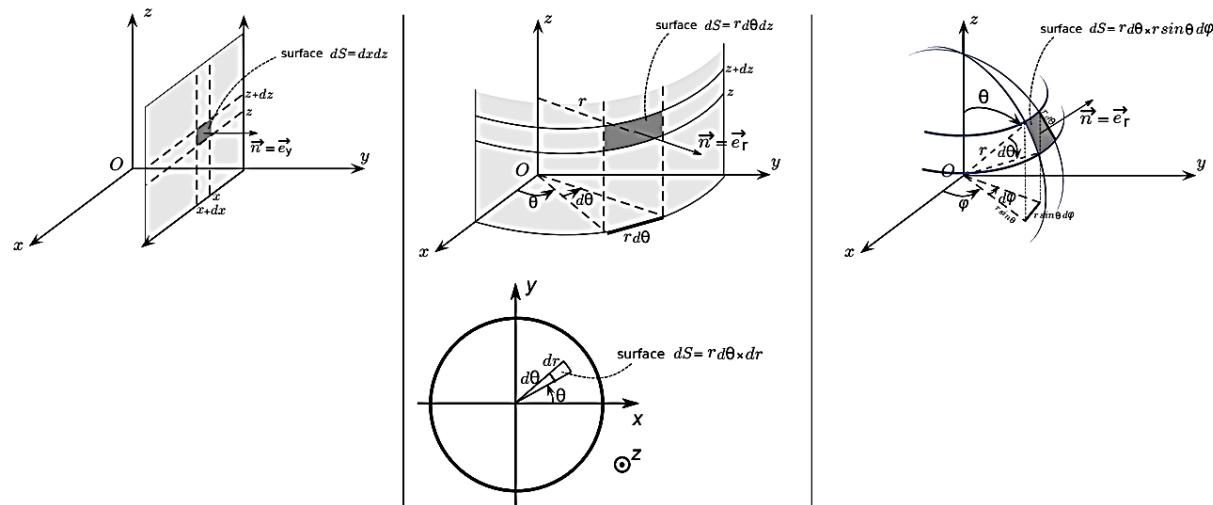
Systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques, sphériques

Simulations : [Menu Cinématique](#)

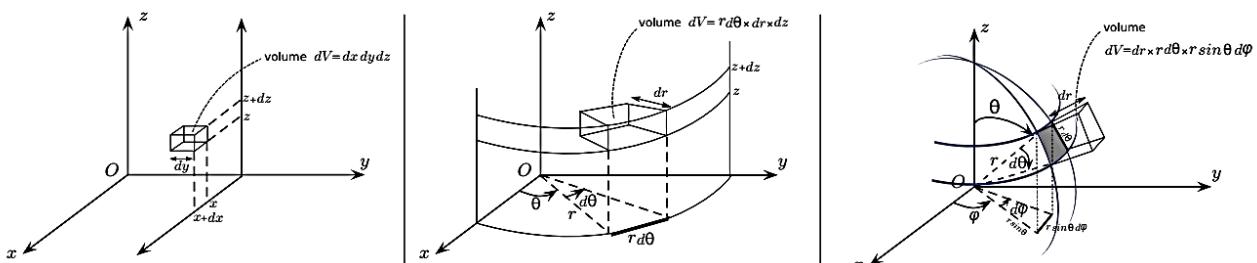


Remarque : Les coordonnées polaires correspondent aux coordonnées cylindriques, mais dans un plan seulement (coordonnées r et θ , pas de z). C'est un système à deux dimensions.

Surfaces élémentaires :



Volumes élémentaires :



Vecteurs déplacements élémentaires :

- Cartésiennes* : $\vec{dl} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$.
- Cylindriques : $\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$.
- Sphériques : $\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

Opérateurs Gradient, Divergence, Rotationnel, Laplacien

$f(x, y, z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x, y, z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$

On introduit le “vecteur” nabla : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\vec{\text{grad}} f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div } \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$
Laplacien scalaire $\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$	s'applique à un scalaire retourne un scalaire	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \left\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \right\ ^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$
Laplacien vectoriel $\Delta \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\Delta \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta} \vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.