

MF2 MECANIQUE DES FLUIDES

Programme ATS

2. Description d'un fluide en écoulement	
Champ des vitesses. Écoulement stationnaire. Ligne de courant, tube de courant.	Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes. Représenter les lignes de courant d'un champ de vitesses uniforme et stationnaire. Analyser des vidéos, des simulations ou des cartographies d'écoulement.
Bilans de masse et de volume.	Réaliser un bilan de masse ou de volume sur une portion de fluide, les débits étant connus.
Débit volumique et débit massique.	Montrer que dans un écoulement stationnaire, le débit massique se conserve le long d'un tube de courant ; exploiter cette propriété. Montrer que dans un écoulement de fluide incompressible, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant ; exploiter cette propriété.
Flux d'un champ de vecteurs. Vecteur densité de courant de masse.	Exprimer les débits volumique et massique pour un écoulement unidirectionnel uniforme. Calculer le débit volumique du fluide à travers une surface quelconque à l'aide du flux du vecteur vitesse, considéré comme uniforme. Calculer le débit massique du fluide à travers une surface quelconque à l'aide du flux du vecteur densité courant de masse, considéré comme uniforme.
Conservation du débit volumique dans un écoulement de fluide incompressible.	Exploiter qualitativement la topographie des lignes de courant pour prévoir les variations de la norme du vecteur vitesse le long des tubes de courant.
Équation locale de conservation de la masse dans un fluide en écoulement unidirectionnel. Opérateur divergence.	Démontrer l'équation locale de conservation de la masse dans un écoulement de fluide unidirectionnel. Généraliser au cas tridimensionnel. Exploiter l'expression fournie de l'opérateur divergence. Montrer que la divergence du champ des vitesses d'un fluide incompressible est nulle en tout point.
3. Aspect énergétique de l'écoulement d'un fluide en régime stationnaire	
Relation de Bernoulli.	Définir un écoulement parfait. Établir et exploiter la relation de Bernoulli à partir du premier principe de la thermodynamique appliqué à un système ouvert pour un écoulement parfait, incompressible et stationnaire entre deux points situés sur une même ligne de courant.
Perte de charge singulière et régulière.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique lors de l'écoulement.
Transport de fluide dans une conduite.	Exploiter le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système ouvert pour effectuer un bilan de puissance dans une conduite pouvant contenir une pompe ou une turbine.

I) DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN ECOULEMENT

I)1) Description lagrangienne et trajectoire

Définition : l'approche lagrangienne consiste à suivre une particule de fluide au cours son mouvement.



On suit une **particule de fluide (système fermé)** lors de son déplacement. On obtient la trajectoire de la particule de fluide.

Il s'agit d'une photographie avec un long temps de pose. L'approche lagrangienne permet d'appliquer les théorèmes de la mécanique mais ne permet pas d'avoir une vue d'ensemble de l'écoulement.



Trajectoire des étoiles dans le ciel (pose longue)



Trajectoire des phares d'une voiture dans la nuit

I)2) Description eulérienne et ligne de courant

Définition : l'approche eulérienne consiste à étudier les propriétés les propriétés du fluide en un point M de l'espace. On définit alors :

- Un champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$
- Un champ des masses volumiques $\rho(M, t)$
- Un champ des pressions $p(M, t)$

qui dépendent du temps t et du point M (fixe) où ils sont étudiés.



Radar automobile = approche eulérienne de la circulation automobile = mesure de la vitesse des véhicules, en un point donnée, à un instant donné.

On associe les grandeurs eulériennes (v, ρ, p, \dots) en un point M à la date t aux grandeurs associées à la particule de fluide qui passe en un point M à la date t .

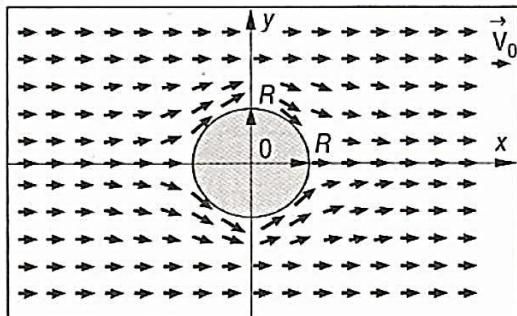
L'approche eulérienne permet d'avoir une vue d'ensemble de l'écoulement.

Approche eulérienne → Etude d'un **système ouvert**.

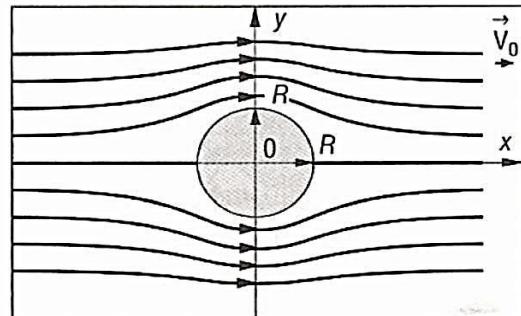
Il s'agit d'une photographie avec un temps de pose très court.

A partir du champ des vitesses, on peut construire les lignes de courant.

Ligne de courant : Ligne orientée tangente (en chacun de ses points) à la vitesse eulérienne à la date t .



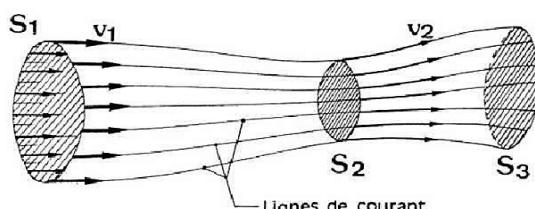
Carte de champ des vitesses d'un fluide s'écoulant autour d'un cylindre



Lignes de courant correspondantes

Remarque : les lignes de courant sont déterminées à une date t donnée. Il s'agit d'une image instantanée de l'écoulement.

Tube de courant : Ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Remarque : Lignes de courant (approche eulérienne) et trajectoire (approche lagrangienne) sont confondues si l'écoulement est **stationnaire**, c'est-à-dire indépendant du temps.

I)3) Débits massique et volumique

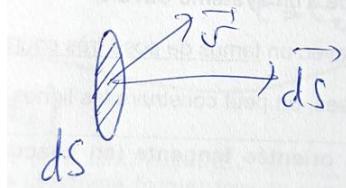
Débit massique

Pour les fluides compressibles (masse volumique ρ non uniforme, c'est-à-dire qui varie au cours du mouvement du fluide), on caractérise généralement l'écoulement par son débit de masse appelé **débit massique**.

Débit massique D_M à travers une surface (Σ) = Masse qui traverse la surface (Σ) par unité de temps :

$$D_M = \frac{dm}{dt} = \iint_{\Sigma} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Unité : kg.s^{-1}



Ou plus précisément, dans ma mesure où D_M dépend à priori du lieu M et du temps t :

$$D_M(M, t) = \frac{dm}{dt}(M, t) = \iint_{\Sigma} \rho(M, t) \cdot \vec{v}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

On définit le **vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{J}_M(M, t)$** :

$$\overrightarrow{J}_M(M, t) = \rho(M, t) \cdot \vec{v}(M, t) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{J}_M = \rho \cdot \vec{v}$$

On peut définir le débit massique de la manière suivante :

$$D_M = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{J}_M \cdot d\vec{S}$$

Unités : ρ en kg.m^{-3}

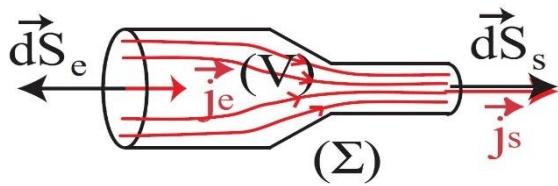
$v = \|\vec{v}\|$ en m.s^{-1}

$$j_M = \|\overrightarrow{J}_M\| \text{ en } \text{kg.m}^{-3} \cdot \text{m.s}^{-1} = \text{kg.s}^{-1} \cdot \text{m}^2$$

Exemple : Ecoulement unidimensionnel selon l'axe x :



$$D_M = \rho(x) \cdot v(x) \cdot S(x)$$



En régime stationnaire, le débit massique se **conserve**, c'est-à-dire qu'il est identique à travers toute section d'un tube de courant. En revanche, la densité de courant de masse n'est pas constante : elle est d'autant plus intense que les lignes de courant se resserrent.

Régime stationnaire : $D_M = \text{constante}$

Débit volumique

Pour les fluides incompressibles (masse volumique ρ uniforme, c'est-à-dire qui ne varie pas au cours du mouvement du fluide), on caractérise généralement l'écoulement par son débit de volume appelé **débit volumique**.

Débit volumique D_V à travers une surface (Σ) = Volume qui traverse la surface (Σ) par unité de temps :

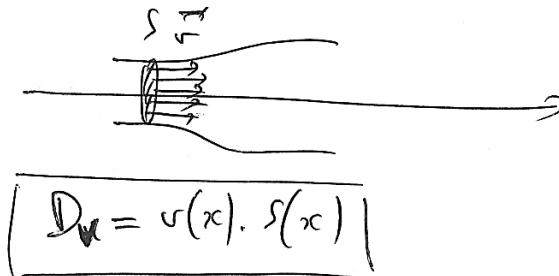
$$D_V = \frac{dV}{dt} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Unité : $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Ou plus précisément, dans ma mesure où D_V dépend à priori du lieu M et du temps t :

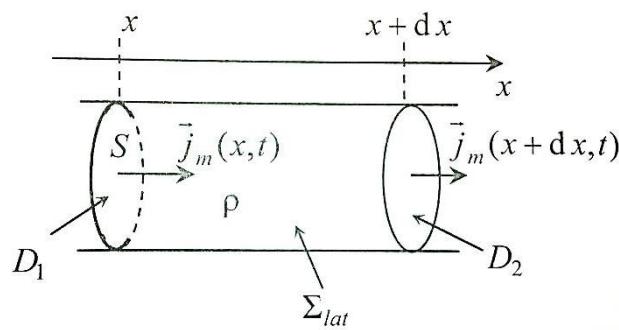
$$D_V(M, t) = \frac{dV}{dt}(M, t) = \iint_{\Sigma} \vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Exemple : Ecoulement unidimensionnel selon l'axe x :



II) CARACTERISTIQUES D'UN ECOULEMENT

II)1) Equation de continuité



Surface (Σ) = $\Sigma_{lattérale} \cup D_1 \cup D_2$ surface de contrôle (fermée) contenant un volume V et une masse m de fluide.

On évalue les quantités de matière entrante et sortante de (Σ) à l'aide du vecteur densité de courant de masse \vec{j}_M à travers la surface (Σ).

Hypothèses :

- Ecoulement unidimensionnel : $\vec{J}_M = \vec{j}_M(x, t) \cdot \vec{e}_x$
- Le fluide ne comporte ni puits ni source
- Masse sortante > masse entrante

Demo qui sera reprise en cours :

Masse de fluide δm_S traversant (Σ) pendant la durée dt (comptée positivement comme une masse globalement sortante car masse sortante > masse entrante) :

$$\delta m_S = \iint_{\Sigma} \vec{J}_M \cdot \vec{dS} \cdot dt > 0$$

$$\delta m_S = \left[\iint_{\Sigma_{lattérale}} \vec{J}_M \cdot \vec{dS} + \iint_{D_1} \vec{J}_M \cdot \vec{dS} + \iint_{D_2} \vec{J}_M \cdot \vec{dS} \right] \cdot dt > 0$$

$$\iint_{\Sigma_{lattérale}} \vec{J}_M \cdot \vec{dS} = 0 \text{ car perpendicularité}$$

D'où :

$$\delta m_S = [j_M(x + dx, t) \cdot S - j_M(x, t) \cdot S] \cdot dt = [j_M(x + dx, t) - j_M(x, t)] \cdot S \cdot dt = S \cdot \frac{\partial j_M}{\partial x} \cdot dx \cdot dt > 0$$

Masse de fluide δm_{int} à l'intérieur du volume V :

$$m_{int} = \iiint_V \rho \cdot dt$$

Variation δm_{int} de cette masse :

$$\delta m_{int} = d \left(\iiint_V \rho \cdot d\tau \right) < 0$$

$\delta m_{int} < 0$ car masse sortante > masse entrante

$$\delta m_{int} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt \cdot V = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

Le fluide ne comporte ni puits ni source → Conservation de la masse :

$$\delta m_S + \delta m_{int} = 0$$

$$S \cdot \frac{\partial j_M}{\partial x} \cdot dx \cdot dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot S \cdot dx \cdot dt = 0$$

On obtient :

Equation locale de conservation de la masse (ici, à une dimension) :

$$\frac{\partial j_M}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ici, masse sortante > masse entrante

$$\Rightarrow \frac{\partial j_M}{\partial x} > 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$$

\Rightarrow La masse volumique du fluide baisse

\Rightarrow **Le fluide se dilate**

Généralisation à 3 dimensions :

$$\frac{\partial j_{M_x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{M_y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{M_z}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$div(\vec{j}_M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{M_x} \\ j_{M_y} \\ j_{M_z} \end{pmatrix} = \frac{\partial j_{M_x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{M_y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{M_z}}{\partial z}$$

Équation locale de conservation de la masse :

$$div(\vec{j}_M) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

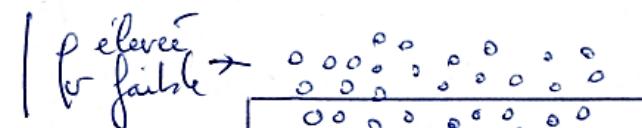
II)2) Ecoulement à caractère divergent

Exemple : Divergence du vecteur vitesse / divergence du vecteur densité de courant de masse : Départ de marathon

Marathon de Paris 2018 : Le départ de la 42e édition du Marathon de Paris est donné - video
[Dailymotion](#)



Vue de dessus :

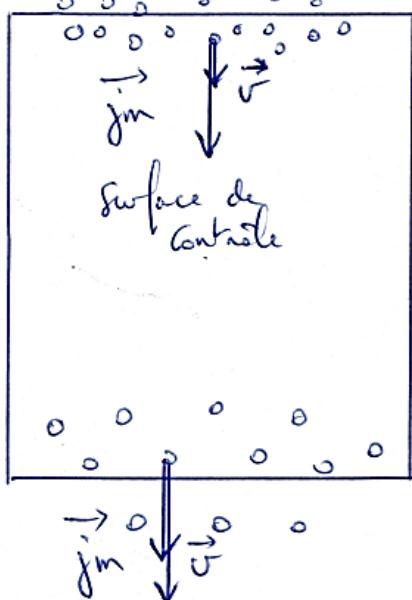


$$\text{div } \vec{v} \neq 0$$

Ecoulement :

Compressible

$\left\{ \begin{array}{l} f_v \text{ faible} \\ v \text{ élevée} \end{array} \right\} \rightarrow$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conservation de } j_m = f_v \cdot v \\ \text{Non conservation de } v \end{array} \right.$

Conservation de la masse

$$\text{div } \vec{j}_m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{j}_m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

On un point donné, f ne varie pas en fonction du temps (vitesse "entière")

\Leftrightarrow Ecoulement stationnaire

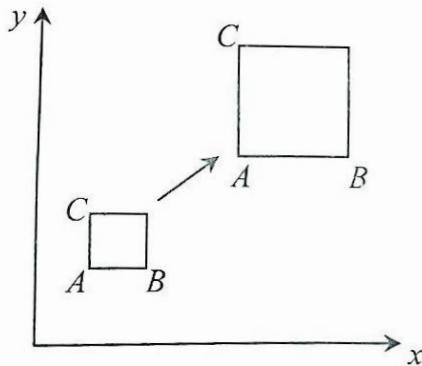


Figure 1 : $\operatorname{div} \vec{v} > 0$,
écoulement compressible

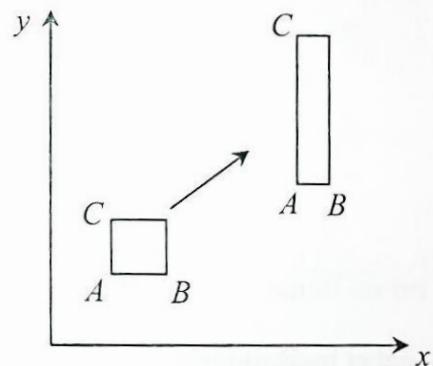


Figure 2 : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$,
écoulement incompressible

$$v_x(B) > v_x(A) \text{ ou } \frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$$

$$v_y(C) > v_y(A) \text{ ou } \frac{\partial v_y}{\partial y} > 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} > 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$$

Les points A, B et C s'éloignent les uns des autres, le volume V de la particule de fluide augmente au cours du temps => la masse volumique ρ du fluide diminue au cours du temps.

(Particule de Fluide = Système fermé
Si V augmente, pour $m = \text{constante}$, ρ diminue)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$$

Ecoulement compressible

$$v_x(B) < v_x(A) \text{ ou } \frac{\partial v_x}{\partial x} < 0$$

$$v_y(C) > v_y(A) \text{ ou } \frac{\partial v_y}{\partial y} > 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Les points A et C s'éloignent mais les points A et B se rapprochent, la Particule de Fluide se déforme mais son volume V reste constant => la masse volumique ρ du fluide reste constante au cours du temps.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ecoulement incompressible

On parle de « **champ des vitesses à flux conservatif** »

$\operatorname{div}(\vec{v}) \neq 0$: Ecoulement compressible

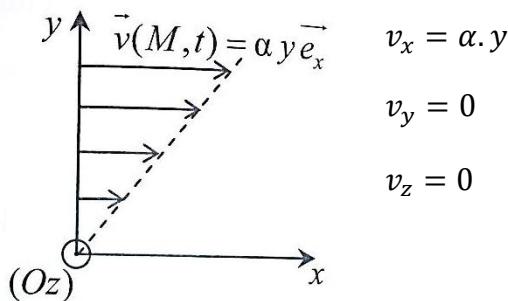
$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$: Ecoulement incompressible

II)3) Ecoulement à caractère rotationnel

Exemple :

Champ de vitesses d'un fluide visqueux au voisinage d'un obstacle,

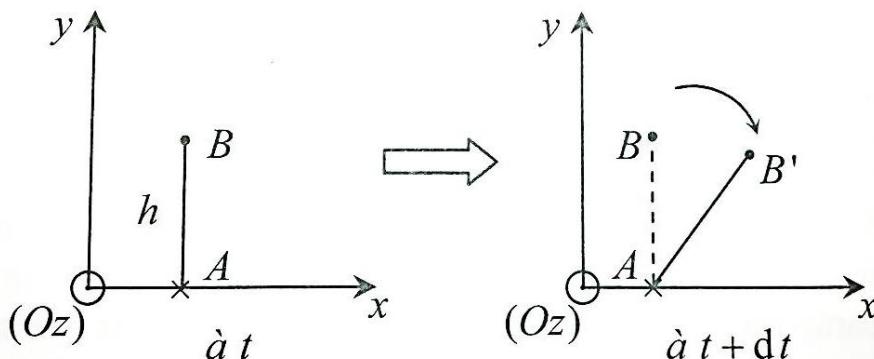
Champ de vitesses sous la forme : $\vec{v}(M, t) = v_x \cdot \vec{e}_x = \alpha \cdot y \cdot \vec{e}_x$ avec $\alpha > 0$



$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \cdot \vec{e}_z$$

En plaçant un morceau de bois AB dans l'écoulement,

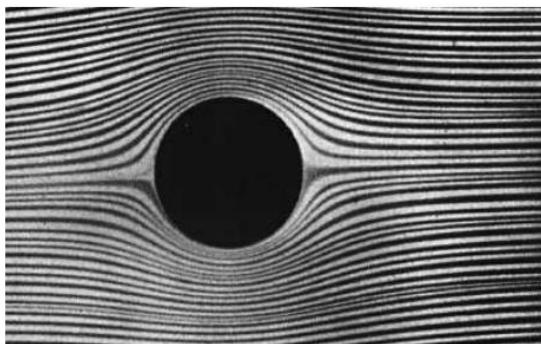
Etant donné que $v_B > v_A$, le morceau de bois est animé d'un « mouvement de rotation » autour de l'axe Oz.



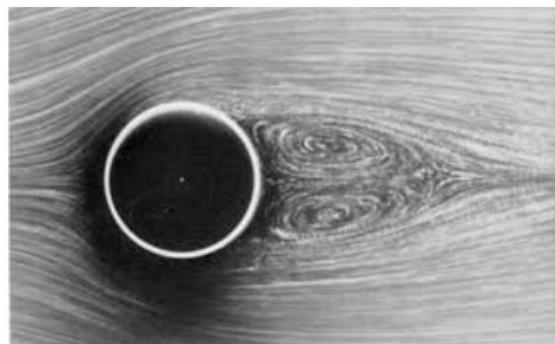
$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \neq \vec{0}$: Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$: Ecoulement irrotationnel

II)4) Ecoulements laminaire et turbulent



Écoulement laminaire



Écoulement turbulent

Photos issues du site de l'ONERA

Ecoulement laminaire : Le champ des vitesses est régulier dans l'espace et au cours du temps, ce qui permet de définir des lignes de courant. Le fluide est décomposable en couches qui s'écoulent les unes sur les autres.

Ecoulement turbulent : Le champ des vitesses subit de fortes fluctuations dans l'espace et au cours du temps. Comportement « chaotique » du fluide. On ne peut plus définir les lignes de courant. Brassage / homogénéisation du fluide.

Vidéo : [how wings work? Smoke streamlines around an airfoil](#)



Écoulement laminaire



Écoulement turbulent

Principe de la portance :

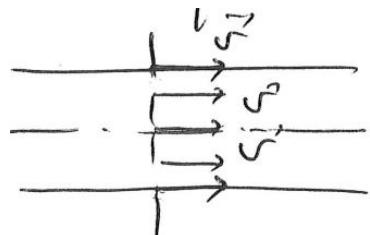


III) ENERGETIQUE DES ECOULEMENTS

III)1) Fluide parfait, fluide newtonien

Fluide parfait : fluide dont l'écoulement se fait **sans perte (sans frottement)**. Seules les forces de pression interviennent au sein du fluide.

Profil de vitesses **uniforme** :



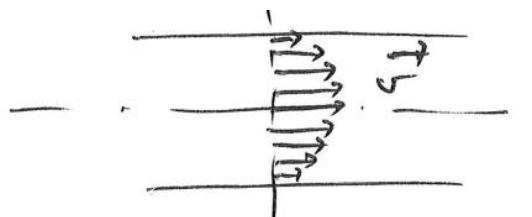
Le fluide « glisse » sur les parois, sans adhérence.

Il s'agit d'un cas idéal !

Condition aux limites : $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

Fluide newtonien ou fluide visqueux : il y des pertes (frottements) lors de l'écoulement.

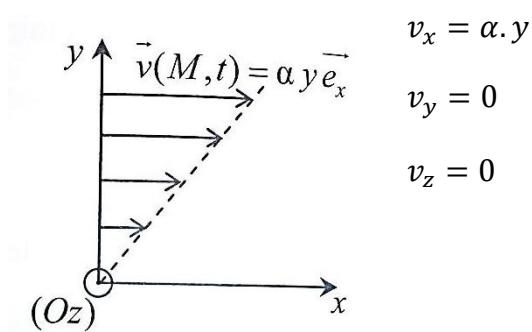
Profil de vitesses **non uniforme** :



Les particules (ou couches) de fluide les plus lentes freinent les particules (ou couches) de fluide les plus rapides, par des **forces de cisaillement**.

Exemple

Champ de vitesses du type : $\vec{v}(x, y) = \alpha \cdot y \cdot \vec{e}_x$



$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{v_x} \\ j_{v_y} \\ j_{v_z} \end{pmatrix} = \frac{\partial j_{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{v_z}}{\partial z} = 0 \quad \text{Ecoulement incompressible}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \cdot \vec{e}_z \quad \text{Ecoulement rotationnel}$$

Force élémentaire de cisaillement :

$$\overrightarrow{dF(y)} = \eta \cdot dS \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(y) \cdot \vec{e}_x$$

η = viscosité dynamique (Pa.s ou Pl, poiseuille)

Homogénéité :

Quelques ordres de grandeur :

$$\eta (\text{eau}, 20^\circ\text{C}) = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

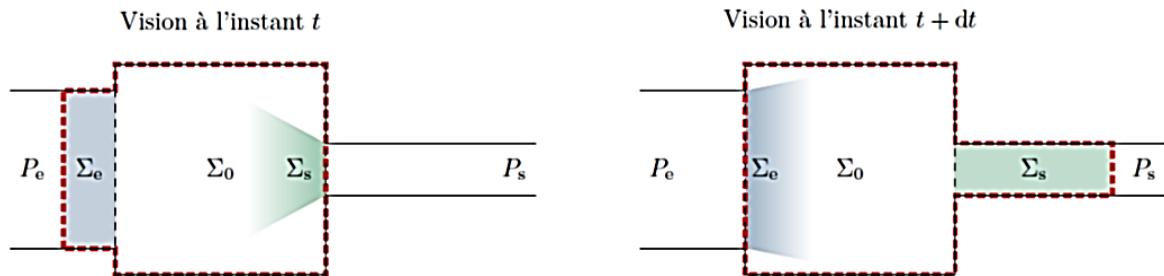
$$\eta (\text{huile}) \approx 0.1 \text{ Pa.s}$$

$$\eta (\text{air}, 15^\circ\text{C}) = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

III)2) Relation de Bernoulli

Bilan énergétique pour un système ouvert en régime stationnaire :

Demo qui sera reprise en cours :



Le système considéré est défini par la surface de contrôle (Σ) ou (Σ_0) et constitue un **système ouvert**, avec une masse dm_e de fluide entrant dans (Σ) entre les instants t et $t + dt$ et une masse dm_s de fluide qui en sort entre les instants t et $t + dt$.

La masse dm_e entrant pendant dt constitue le système (Σ_e), tandis que la masse dm_s sortant pendant dt constitue le système (Σ_s).

On définit alors le système (Σ^*) associé à (Σ) de la manière suivante :

A l'instant t , $(\Sigma^*)(t) = (\Sigma)(t) + (\Sigma_e)$ (volume de contrôle plus matière qui va entrer dans ce volume pendant la durée dt)

A l'instant $t + dt$, $(\Sigma^*)(t + dt) = (\Sigma)(t + dt) + (\Sigma_s)$ (volume de contrôle plus matière qui va sortir de ce volume pendant la durée dt).

Ainsi défini, ce système (Σ^*) constitue un **système fermé** (ses frontières se déplacent avec le fluide en écoulement).

Hypothèse : régime stationnaire

$$\Rightarrow dm_e = dm_s = dm = \text{constante} = D_m \cdot dt \text{ avec } D_m \text{ débit massique.}$$

Travail élémentaire des forces pressantes sur le système (Σ^*):

$$\begin{aligned} \delta W_p &= p_e \cdot dV_e - p_s \cdot dV_s = p_e \cdot \frac{dm}{\rho_e} - p_s \cdot \frac{dm}{\rho_s} = dm \cdot \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s} \right) = D_m \cdot dt \cdot \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s} \right) \\ &= D_m \cdot \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s} \right) \cdot dt \end{aligned}$$

Variation élémentaire d'énergie mécanique du système (Σ^*):

$$\begin{aligned} dE_m &= dE_c + dE_P = \left(\frac{1}{2} \cdot dm \cdot v_s^2 - \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v_e^2 \right) + (dm \cdot g \cdot z_s - dm \cdot g \cdot z_e) \\ &= dm \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v_s^2 - \frac{1}{2} v_e^2 \right) + (g \cdot z_s - g \cdot z_e) \right] \\ &= D_m \cdot dt \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s \right) - \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \right) \right] \end{aligned}$$

Hypothèses :

- Régime stationnaire (rappel)

- Ecoulement parfait (sans pertes) et adiabatique
- Pas de pièce mobile = pas de machine hydraulique
- Ecoulement incompressible (ρ uniforme d'où $\rho_e = \rho_s$)

1^{er} principe appliqué au système (Σ^*):

$$dE_m + dU = \delta W + \delta Q$$

$$dE_m + dU = \delta W_i + \delta W_p + \delta Q$$

$dU = 0$ ou $U = cte$ pour un écoulement incompressible et isentropique (admis)

$\delta Q = 0$ car écoulement adiabatique

$\delta W_i = 0$ car pas de pièce mobile

$$dE_m = \delta W_p$$

$$D_m \cdot dt \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s \right) - \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \right) \right] = D_m \cdot \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s} \right) \cdot dt$$

On obtient :

Relation de Bernoulli pour un fluide en écoulement stationnaire et incompressible, sans machine hydraulique et sans perte :

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \quad (1) \quad \text{Unités : J.kg}^{-1}$$

En multipliant (1) par ρ :

$$p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s = p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e \quad (2) \quad \text{Unités : Pa ou J.m}^{-3}$$

En multipliant (1) par D_m ou (2) par D_v :

$$D_m \left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s \right) = D_m \left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \right) \quad (3) \quad \text{Unités : W}$$

III)3 Effet Venturi et applications

Dans la suite, on se place dans les conditions de validité de la relation de Bernoulli.

On considère un écoulement parfait, incompressible et stationnaire dans une conduite dont la section varie.

Les variations d'énergie potentielle restent négligeables tant que la variation d'altitude fait peu varier la pression par rapport à la pression atmosphérique. Le modèle de l'atmosphère isotherme nous donne une altitude caractéristique de variation de 8 km, très grande devant les dimensions des systèmes étudiés.

Application : Effet Venturi

On considère un écoulement parfait, incompressible et stationnaire dans une conduite dont la section varie, telle que $S_1 > S_2$ (cf. figure 1).

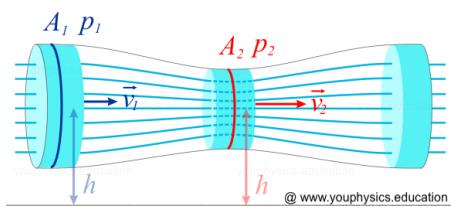


Figure 1

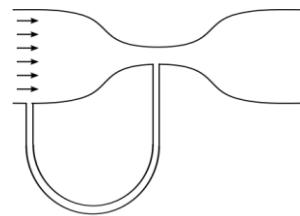


Figure 2

Indiquer la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et conclure sur l'évolution de la vitesse dans le rétrécissement.

En considérant une ligne de courant (par exemple la ligne horizontale à la hauteur h), indiquer la relation entre les pressions p_1 et p_2 , et conclure sur l'effet Venturi.

Représenter le niveau de liquide dans le manomètre de la figure 2.

Conservation du débit massique pour un écoulement stationnaire : $D_{m1} = D_{m2}$, incompressible : $D_{v1} = D_{v2}$ soit en supposant la vitesse uniforme sur une section droite : $v_1 S_1 = v_2 S_2$. conclusion : $S_1 > S_2$ donne $v_1 < v_2$:

Écoulement parfait, stationnaire, incompressible, horizontal dans une conduite dont la section varie. $S_1 > S_2$, ici, sur la figure 1.

Relation de Bernoulli entre A_1 et A_2 , sur la même ligne de courant : $\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz = cte_{ldc} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz$

conclusion sur les pressions p_1 et p_2 : $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho(v_2^2 - v_1^2) > 0$: **P1 > P2** : **dépression au niveau des rétrécissements**

manomètre : hauteur de liquide plus élevée au niveau du rétrécissement

L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique ; ainsi, lorsque les lignes de courant se resserrent, la vitesse augmente. D'après la relation de Bernoulli, l'augmentation de vitesse s'accompagne d'une diminution de la pression.

Effet Venturi : dans un écoulement parfait, stationnaire d'un écoulement incompressible et homogène, un **rétrécissement** du conduit provoque une **dépression** à cet endroit (la pression diminue si la canalisation rétrécit).

Il existe de très nombreuses applications de cet effet Venturi.

Mesure de débit : débitmètre Venturi

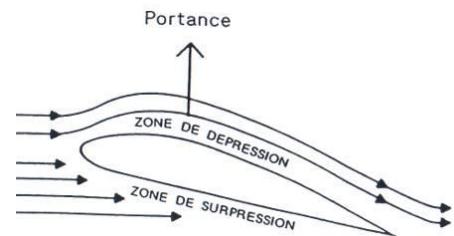
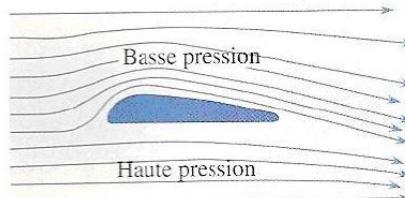
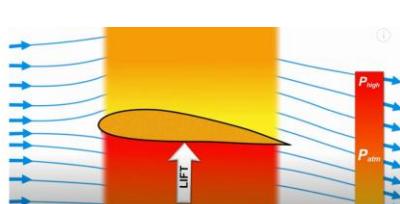
➤ Voir TD

Mesure de vitesse : sonde de Pitot

➤ Voir TD

Portance d'une aile d'avion

<https://www.youtube.com/watch?v=w78JT6azrZU>

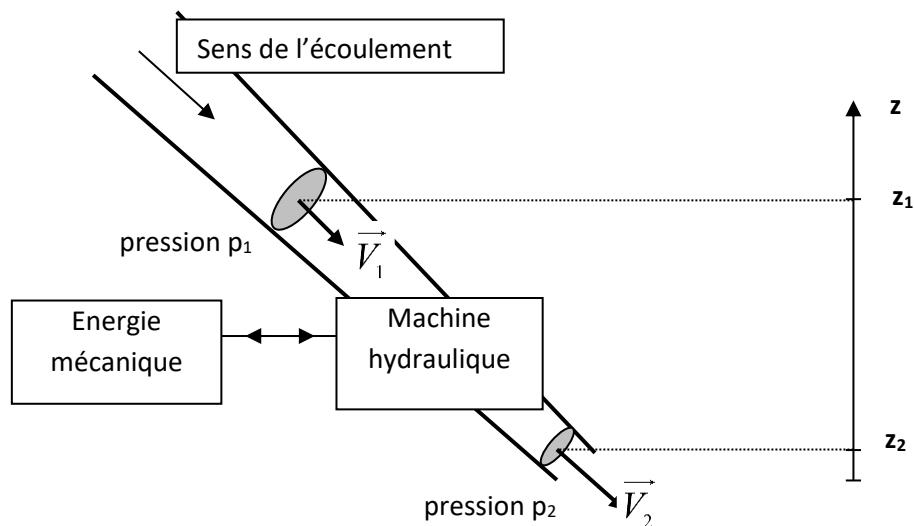


Les lignes de courant se resserrent au-dessus de l'aile, la vitesse de l'écoulement y est plus grande (extrados) qu'en dessous (intrados), du fait du profil de l'aile.

La pression est donc plus faible au-dessus de l'aile qu'en dessous, d'où l'apparition d'une résultante de forces pressantes dirigée vers le haut. Cet effet n'explique pas seul la portance de l'aile, mais il y contribue de façon significative.

III)4) Relation de Bernoulli généralisée

Relation de Bernoulli pour un fluide en écoulement stationnaire et incompressible, avec machine hydraulique et avec perte de charge :



p_1, p_2 : pressions du fluide en entrée, sortie (Pa)

v_1, v_2 : vitesses du fluide en entrée, sortie du système (m.s^{-1})

z_1, z_2 : altitudes du fluide en entrée, sortie du système (m.s^{-1})

ρ : masse volumique du fluide (incompressible) (kg.m^{-3})

g : accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

D_m : débit massique lors de l'écoulement **stationnaire** (kg.s^{-1})

D_v : débit volumique lors de l'écoulement **stationnaire incompressible** (kg.m^{-3})

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 \right) = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 \right) + E_{m\ mach} - E_{m\ ch} \quad (1) \text{ Unités : J.kg}^{-1}$$

$E_{m\ mach}$: Energie massique utile de la machine hydraulique (J.kg^{-1}), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$E_{m\ ch}$: Pertes de charge massique lors de l'écoulement (J.kg^{-1})

En multipliant (1) par ρ :

$$\left(p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \right) = \left(p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 \right) + E_{v\ mach} - E_{v\ ch} \quad (2) \text{ Unités : Pa ou J.m}^{-3}$$

$E_{v\ mach}$: Energie volumique utile de la machine hydraulique (J.m^{-3}), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$E_{v\ ch}$: Pertes de charge volumiques lors de l'écoulement (J.m^{-3})

En multipliant (1) par D_m ou (2) par D_v :

$$D_m \cdot \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 \right) = D_m \cdot \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 \right) + P_{mach} - P_{ch} \quad (3) \text{ Unités : W}$$

P_{mach} : Puissance utile de la machine hydraulique (W), > 0 si pompe, < 0 si turbine

P_{ch} : Pertes de charge lors de l'écoulement (W)

En divisant (1) par g :

$$\left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \right) = \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right) + H_{mach} - z_{ch} \quad (4) \text{ Unités : mCF, mètre de colonne de fluide}$$

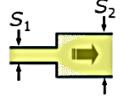
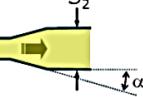
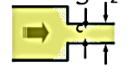
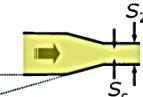
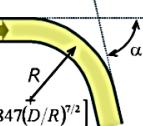
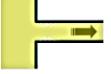
H_{mach} : Puissance utile de la machine hydraulique exprimée en mCF, > 0 si pompe, < 0 si turbine

P_{ch} : Pertes de charge lors de l'écoulement, en mCF

Pertes de charge régulières et singulières

Pertes de charge régulières : essentiellement dues aux frottements visqueux entre les particules fluides situées près des parois de la conduite, elles existent pour tout tronçon de conduite et dépendent de deux paramètres principaux : la nature de l'écoulement (plus ou moins turbulent), ainsi que les propriétés de la paroi (et notamment sa rugosité).

Pertes de charge singulières : elles sont provoquées par la présence d'accidents localisés sur la canalisation : rétrécissement, élargissement, vanne, coude, clapet, filtre, débitmètre, échangeur, etc., qui provoquent des pertes d'énergie sous forme de frottements à cause des tourbillons créés par ces obstacles.

Elargissement brusque $K = (1 - S_1/S_2)^2$ 	Divergent $K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$ 
Rétrécissement brusque $K = (1/\mu - 1)^2$ $\mu = S_c/S_2$ 	Convergent $K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$ $\mu = S_c/S_2$ 
Coude brusque $K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 	Coude arrondi  $K = \frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847(D/R)^{7/2}]$
Entrée de canalisation brusque $K = 0,5$ 	Entrée de canalisation progressive $K = 0,04$ 