

## D.S. de Physique N°4

Durée 3h00

Lire tout l'énoncé avant de commencer, **numéroter** les feuilles et les questions, utiliser les **notations de l'énoncé**, apporter des **justifications** brèves mais précises et complètes, fournir des résultats **homogènes** et **encadrés** et des applications numériques **soulignées** et accompagnées d'une **unité**.

### Calculatrice interdite

**Le sujet peut paraître long. Il ne s'agit pas d'essayer absolument de le finir mais de gérer au mieux votre temps.**

### **PROBLEME 1 : ETUDE D'UN CIRCUIT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE (ENVIRON 40 % DU BAREME)**

Un générateur sinusoïdal alimente un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité  $C = 0,10\mu\text{F}$ , d'une bobine réelle d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  inconnues, placés en série avec une résistance  $R = 480\Omega$ . Le générateur est un générateur basse fréquence de résistance interne  $R_g = 50\Omega$ , délivrant un signal sinusoïdal  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  de pulsation  $\omega$ .

A toute grandeur réelle  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  est associée une grandeur complexe  $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U} e^{j\omega t}$ , et  $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$  son amplitude complexe. On rappelle que  $j^2 = -1$ .

L'intensité dans le circuit s'écrit :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$ .

Le montage est donné figure 1 ci-dessous :

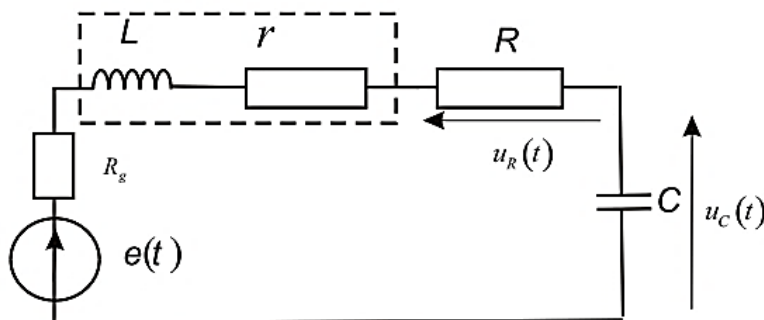


Figure 1

1. Donner les expressions des grandeurs complexes  $\underline{e}(t)$  et  $\underline{i}(t)$ .
2. Démontrer que la tension efficace  $U_{eff}$  peut s'écrire :  $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ .
3. Donner les expressions des impédances complexes de la bobine (constituée des éléments  $L$  et  $r$ ), de la résistance et du condensateur.
4. Préciser le comportement limite de ces différents composants à haute et à basse fréquence. En déduire qualitativement le comportement de la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur à haute et basse fréquences.

5. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{U}_C$  associée à la tension aux bornes du condensateur en fonction de l'amplitude complexe  $\underline{E}$  et des caractéristiques des composants. Mettre  $\underline{U}_C$  sous forme canonique :

$$\underline{U}_C = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

où on exprimera  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des données du problème. On montrera notamment que  $A = \underline{E} = E_m$ .

6. En déduire l'expression de l'amplitude  $U_{Cm}$  de la tension aux bornes du condensateur.  
7. Ecrire  $U_{Cm}$  en fonction de la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $Q$  et  $E_m$ .

Montrer que la tension  $U_{Cm}(x)$  passe par un maximum pour  $x = x_r$  si  $Q > Q_{min}$ .

Déterminer  $Q_{min}$  et montrer que  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

En déduire la pulsation de résonance  $\omega_r$ . La comparer à  $\omega_0$ .

8. Exprimer  $U_{Cm}(\omega=\omega_0)$  en fonction de  $Q$  et  $E_m$ .  
9. Tracer l'allure de  $U_{Cm}(x)$  pour  $Q = 0,1$ ,  $Q = 1$  et  $Q = 10$ .  
10. Déterminer l'expression de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit.

Mettre  $\underline{Z}$  sous la forme  $\underline{Z} = R_0 \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$ .

Préciser l'expression de  $R_0$  en fonction de  $R$ ,  $r$  et  $R_g$ .

11. Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}$  associée à l'intensité du courant traversant le circuit, en fonction de  $\underline{E}$ ,  $R_0$ ,  $Q$ ,  $\omega$  et  $\omega_0$ .  
12. En déduire l'expression de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité dans le circuit.

Mettre  $I_m$  sous la forme :

$$I_m(\omega) = \frac{A'}{\sqrt{1 + B^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Donner les expressions de  $A'$  et  $B$ , en fonction de  $E_m$ ,  $Q$  et  $R_0$ .

13. Montrer que  $I_m(\omega)$  passe par un maximum pour  $\omega = \omega'$ , que l'on précisera. Donner l'expression de la valeur max  $I_{max}$  de  $I_m(\omega)$ , obtenue lorsque  $\omega = \omega'$ .  
14. On appelle bande passante l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min}$  pour lesquelles  $I_m(\omega) > \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ .

Montrer que  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

15. On donne, figure 2 ci-dessous, les graphes de  $U_{Cm}$  et  $I_m$  en fonction de la fréquence  $f$ , fréquence du générateur. L'échelle de gauche concerne  $U_{Cm}$  et l'échelle de droite concerne  $I_m$ . Identifier, en justifiant votre choix, les courbes  $U_{Cm}(f)$  et  $I_m(f)$  parmi les courbes (1) et (2).  
16. Déterminer à partir de ces courbes : l'amplitude  $E_m$  de la tension aux bornes du générateur, la fréquence propre  $f_0$ , le facteur de qualité  $Q$  du circuit, les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  limites de la bande passante, et  $I_{max}$ . Aide au calcul :  $\frac{9}{\sqrt{2}} \simeq 6,4$ .  
17. En déduire les valeurs approchées de  $r$  et  $L$ .

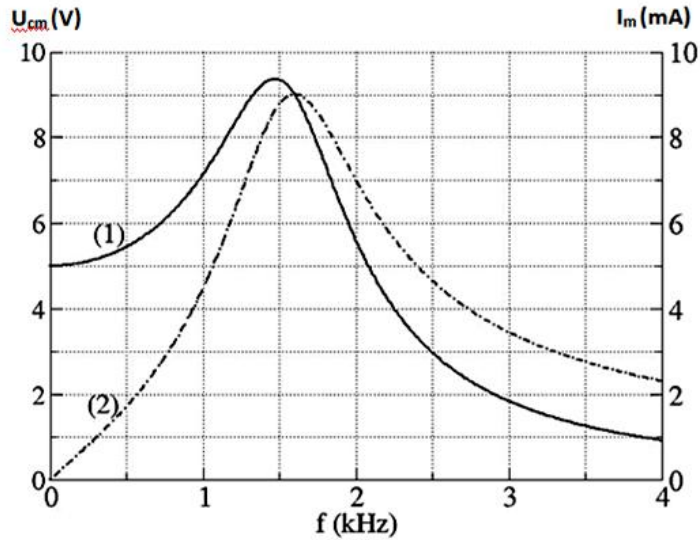


Figure 2

## PROBLEME 2 : ETUDE D'UN REFRIGERATEUR (ENVIRON 30 % DU BAREME)

➤ Questions 27) à 47)

### 3.1 Caractéristique d'un réfrigérateur ditherme réversible

Un fluide réfrigérant décrit un cycle ditherme réversible entre une source chaude de température  $T_c$  et une source froide de température  $T_f$ . On note  $Q_c < 0$  et  $Q_f > 0$  les transferts thermiques reçus par le fluide, pendant un cycle, respectivement de la part des sources chaude et froide et  $W$  le travail reçu par le fluide pendant un cycle.

**27)** Dans le cas d'une machine frigorifique, quel milieu (extérieur ou intérieur du réfrigérateur) constitue la source chaude ? La source froide ?

**28)** Justifier que pour une telle machine  $Q_c < 0$  et  $Q_f > 0$ . Quel est le signe de  $W$  ? Justifier.

**29)** À partir du premier principe de la thermodynamique, exprimer la relation entre  $Q_c$ ,  $Q_f$  et  $W$ .

**30)** Définir l'efficacité  $\eta$  de la machine frigorifique puis l'exprimer en fonction de  $Q_c$  et  $Q_f$ .

**31)** À partir du deuxième principe de la thermodynamique, établir la relation suivante pour le cycle réversible du réfrigérateur :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad (2)$$

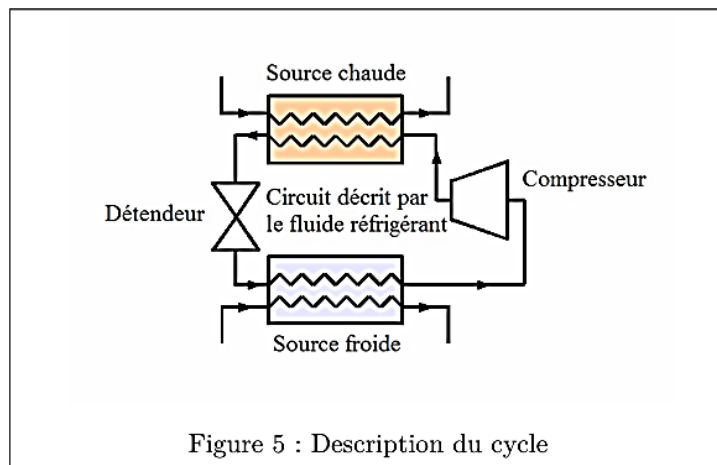
**32)** En déduire que pour le réfrigérateur réversible, l'efficacité  $\eta$  s'écrit :

$$\eta = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad (3)$$

Calculer  $\eta$  pour  $T_c = 300$  K et  $T_f = 280$  K.

### 3.2 Étude d'un réfrigérateur réel

Le schéma de la figure 5 décrit le fonctionnement d'une machine frigorifique réelle. Elle comporte quatre éléments : un compresseur, un condenseur, un détendeur et un évaporateur.

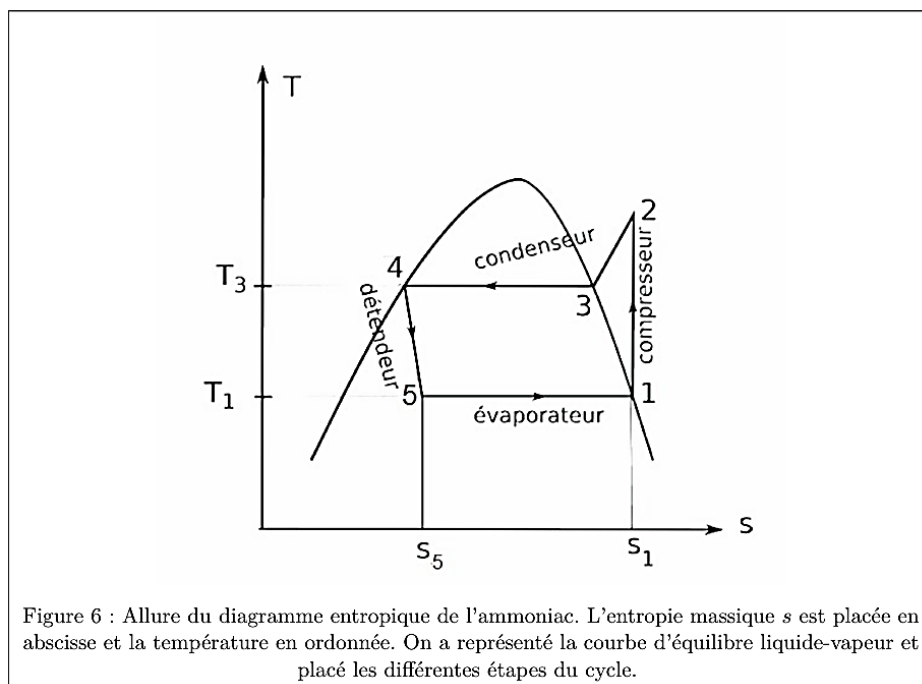


Le fluide réfrigérant est de l'ammoniac.

Données sur l'ammoniac :

- \* Soit  $\gamma = 1,3 = \frac{C_p}{C_v}$ , le rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants.
- \* Relation de Mayer :  $C_p - C_v = \frac{R}{M}$
- \* Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- \* Masse molaire :  $M = 17,0 \text{ g.mol}^{-1}$
- \* Enthalpie massique de vaporisation à  $T_1 = 263 \text{ K}$  (ou chaleur latente massique de vaporisation) :  $\Delta h_{vap}(T_1) = 1450 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Description du cycle réfrigérant :



L'ammoniac est considéré comme un gaz parfait à l'état gazeux.

- ★ L'ammoniac sort de l'évaporateur sous forme de vapeur saturante à l'état 1 (pression  $P_1$ , température  $T_1$ ).
- ★ L'ammoniac gazeux subit ensuite, dans le compresseur, une compression adiabatique et réversible qui l'amène à l'état 2.
- ★ La vapeur subit dans le condenseur une transformation à pression constante : elle est d'abord refroidie jusqu'à la température de l'état 3, notée  $T_3$ , où elle commence à se condenser jusqu'à liquéfaction totale (état 4).
- ★ L'ammoniac liquide passe ensuite dans le détendeur où il subit une détente isenthalpique qui le ramène à la pression initiale  $P_5 = P_1$  et à la température  $T_5$  (état 5).
- ★ La vaporisation du liquide restant se termine dans l'évaporateur pour un retour à l'état 1.

Etat	1	2	3	4	5
T en K	$T_1 = 263$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
P en bar	$P_1 = 3,0$	$P_2 = 10$	$P_3 = 10$	$P_4 = 10$	$P_5 = 3,0$
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$s$ en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$s_1 = 5,8$	$s_2 = 5,8$	$s_3 = 5,3$	$s_4 = 1,4$	$s_5 = 1,45$
$h$ en $\text{kJ.kg}^{-1}$	$h_1 = 1450$	$h_2 = 1620$	$h_3 = 1490$	$h_4 = 320$	$h_5 = 320$

La fraction massique en vapeur sera notée  $x$ . Pour un mélange binaire liquide/vapeur, elle a pour expression :

$$x = \frac{m_v}{m_l + m_v} \quad (4)$$

où  $m_v$  est la masse de vapeur et  $m_l$  est la masse de liquide.

Aide aux calculs pour la partie 3.

$\frac{8,31}{17} = 0,5$	$\frac{263}{3} = 88$	$\frac{1130}{1450} = 0,78$	$\frac{1130}{170} = \frac{20}{3}$
$\frac{0,3}{1,3} = 0,23$	$0,46 \times 130 = 60$	$0,23 \times 130 = 30$	$(\frac{3}{10})^{-0,23} = \frac{4}{3}$

33) Représenter l'allure de ce cycle dans le diagramme de Clapeyron (Pression  $P$ , volume massique  $v$ ) en utilisant le document réponse n°2.

34) Donner les valeurs numériques de la fraction massique de la vapeur :

- \*  $x_1$ , dans l'état 1.
- \*  $x_3$ , dans l'état 3.
- \*  $x_4$ , dans l'état 4.

### 3.2.1 Calcul des températures $T_2$ et $T_3$

35) Pourquoi l'entropie massique ne varie-t-elle pas entre les états 1 et 2 ?

36) En déduire l'expression de  $T_2$  en fonction de  $T_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $\gamma$ .

37) Calculer  $T_2$ .

38) Exprimer la capacité thermique massique à pression constante  $C_p$  de l'ammoniac gazeux en fonction de  $\gamma$ ,  $R$  et de la masse molaire  $M$  de l'ammoniac.

39) Exprimer la variation d'enthalpie massique  $\Delta h_{2 \rightarrow 3}$  entre les états 2 et 3 en fonction de  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $M$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

40) Calculer  $T_3$ .

### 3.2.2 Calcul de $x_5$ et de $Q_f$

41) Justifier que la variation d'enthalpie massique  $\Delta h_{5 \rightarrow 1}$  s'écrit :

$$\Delta h_{5 \rightarrow 1} = h_1 - h_5 = (1 - x_5) \Delta h_{vap}(T_1) \quad (5)$$

42) Exprimer puis calculer  $x_5$  en utilisant les données du tableau.

43) À quel niveau du cycle le transfert thermique  $Q_f$  est-il reçu par le fluide de la source froide ?

44) Exprimer  $Q_f$  en fonction de la masse  $m$  de fluide et des enthalpies massiques.

### 3.2.3 Calcul de l'efficacité $\eta_r$ du réfrigérateur

45) En écrivant le premier principe de la thermodynamique sur un cycle et en considérant que  $(h_1 - h_5) + (h_5 - h_4) + (h_4 - h_2) + (h_2 - h_1) = 0$ , montrer que le travail  $W$  de compression sur le cycle s'écrit :

$$W = m \times (h_2 - h_1) \quad (6)$$

où  $m$  désigne la masse de fluide contenue dans le réfrigérateur.

46) Exprimer puis calculer l'efficacité  $\eta_r$  du réfrigérateur réel.

47) Comparer à l'efficacité calculée à la question 32) et commenter.

### **PROBLEME 3 : PRODUCTION DE TRAVAIL MECANIQUE A PARTIR D'UNE SOURCE CHAUDE (ENVIRON 30 % DU BAREME)**

Questions 27) à 41) et 44) à 46)

La production d'électricité est en majeure partie réalisée dans des centrales où une source chaude (combustion de charbon, de gaz, de fioul, de bois... ou nucléaire) fournit un transfert thermique à un fluide caloporteur, qui ensuite met en rotation une turbine, qui à son tour entraîne une génératrice électrique.



Exemple de la centrale à gaz de Martigues, France.  
Puissance totale de 930 MW.

#### **III.1 Étude du cycle à vapeur à partir du diagramme $T-s$**

Nous étudions ici le cycle thermodynamique suivi par le fluide, dans un exemple simplifié et typique de ce qui est mis en œuvre dans une centrale thermique de puissance moyenne (5 à 20 MW). Le fluide caloporteur est de l'eau. Il évolue selon les étapes décrites dans le document 11.

27 - A partir du diagramme  $T-s$  du document 11, placer le point 3 sur le diagramme  $T-s$  du **document réponse**. Donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique  $h_3$  et de l'entropie massique  $s_3$  du fluide.

28 - A partir du diagramme  $T-s$  du document 11, placer le point 4 sur le diagramme  $T-s$  du **document réponse**. Donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique  $h_4$  et de l'entropie massique  $s_4$  du fluide.

29 – Donner également les valeurs approchées du titre en vapeur  $x_4$  et de la température  $T_4$ .

On s'intéresse ensuite au rendement du cycle.

30 - Exprimer le transfert thermique massique  $q_{23}$  reçu par l'eau lors de l'étape  $2 \rightarrow 3$ , en fonction des enthalpies massiques. On justifiera la réponse.

Faire l'application numérique approchée.

31 - Exprimer le travail indiqué massique  $w_{i,34}$  reçu par l'eau lors de la détente  $3 \rightarrow 4$  dans la turbine, en fonction des enthalpies massiques.

Faire l'application numérique approchée et commenter son signe.

32 - Exprimer également le travail indiqué massique  $w_{i,12}$  reçu par l'eau lors de la compression  $1 \rightarrow 2$ , en fonction des enthalpies massiques.

Faire l'application numérique approchée.

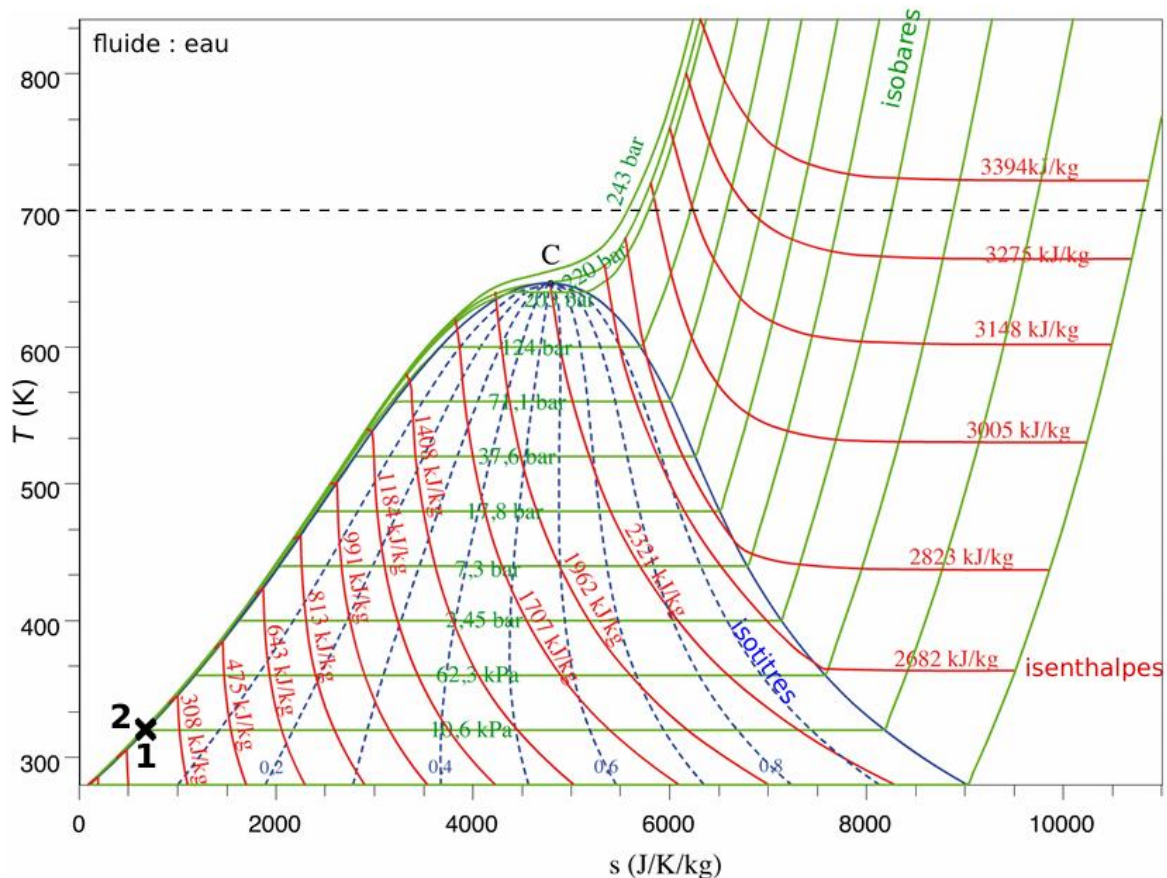
33 - Définir le rendement  $\eta$  de ce cycle en fonction de grandeurs prises parmi  $q_{23}$ ,  $q_{41}$ ,  $w_{i,34}$  et  $w_{i,12}$ .

34 - Faire l'application numérique approchée pour  $\eta$ .

Dans les deux questions qui suivent, on prendra pour simplifier  $\eta = 1/3$  et  $|w_{i,34}| = 1000 \text{ kJ/kg}$ . On souhaite produire une puissance mécanique  $\mathcal{P} = 50 \text{ MW}$  en sortie de turbine.

35 - Estimer la valeur du débit massique à imposer à l'eau dans le circuit.

36 - Estimer la valeur de la puissance thermique  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  que doit recevoir l'eau lors de l'étape  $2 \rightarrow 3$ .



### Description du cycle

Les points 1 et 2 sont déjà représentés sur le diagramme  $T-s$  (ils sont quasiment confondus). Le fluide est de l'eau.

- Dans l'état 1, il est à l'état liquide saturé, de température  $T_1 = 320$  K, pression  $p_1 = 10,6$  kPa et enthalpie massique  $h_1 = 197$  kJ/kg.
- $1 \rightarrow 2$  : compression adiabatique réversible.  
On donne  $T_2 = 320$  K,  $p_2 = 124$  bar,  $h_2 = 209$  kJ/kg.
- $2 \rightarrow 3$  : apport de chaleur isobare ( $p_3 = p_2 = 124$  bar) et sans parties mobiles, c'est-à-dire que l'eau reçoit un transfert thermique massique en circulant dans un échangeur thermique au contact de la source chaude (là où le combustible est brûlé). Dans l'état 3 l'eau est sous forme de vapeur sèche à  $T_3 = 700$  K.
- $3 \rightarrow 4$  : détente de l'eau dans une turbine jusqu'à être ramenée à la pression  $p_4 = p_1 = 10,6$  kPa. Une partie du travail produit par cette turbine sert à faire fonctionner le compresseur qui réalise l'étape  $1 \rightarrow 2$ , le reste étant le travail utile (utilisé pour ensuite entraîner la génératrice électrique). On suppose la détente adiabatique et réversible. L'état 4 est diphasique et on note  $x_4$  le titre en vapeur au point 4.
- $4 \rightarrow 1$  : le fluide cède un transfert thermique vers le milieu extérieur afin de se condenser et de retourner dans l'état 1. Il le fait en circulant dans un échangeur thermique isobare et sans parties mobiles.

On néglige toute variation d'énergie cinétique ou potentielle de l'eau.

Document 11 : diagramme température  $T$  – entropie massique  $s$  de l'eau et description du cycle modèle. Sur le diagramme sont également tracées les isobares, isenthalpes et isotitres.

### III.2 Étude du cycle à vapeur sans le diagramme et rôle de $p_3$ et $T_3$

Cette sous-partie vise à aboutir à une expression du rendement du cycle en se basant non pas sur une lecture du diagramme  $T$ - $s$ , mais sur des expressions établies sous des hypothèses simplificatrices :

- la vapeur est décrite comme un gaz parfait ;
- on donne  $c_p = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  la capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau, supposée constante.

Par ailleurs, on note  $h_0 = 2590 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  l'enthalpie massique de la vapeur d'eau à  $T_0 = 320 \text{ K}$  et  $p_0 = 10,6 \text{ kPa}$ , et  $s_0 = 8150 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  l'entropie massique en ce même point.

37 - Établir l'expression de l'enthalpie massique  $h_3$  dans l'état 3, en fonction de  $c_p$ ,  $T_3$ ,  $T_0$  et  $h_0$ .

Étant donnés  $p_3 = 124 \text{ bar}$  et  $T_3 = 700 \text{ K}$ , on peut utiliser l'expression de l'entropie massique du gaz parfait pour obtenir  $s_3 = s_0 + c_p \ln(T_3/T_0) - (R/M) \ln(p_3/p_0) = 6450 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

38 - Quelle est alors la valeur de l'entropie massique  $s_4$  au point 4 sous l'hypothèse d'une détente adiabatique et réversible ?

On admet que l'état 4 est diphasique, avec  $T_4 = 320 \text{ K}$  et  $s_4$  connu. On note  $h_v$  et  $s_v$  l'enthalpie massique et l'entropie massique de la vapeur saturée à  $T_4$ , et  $h_l$  et  $s_l$  celles du liquide saturé à  $T_4$ .

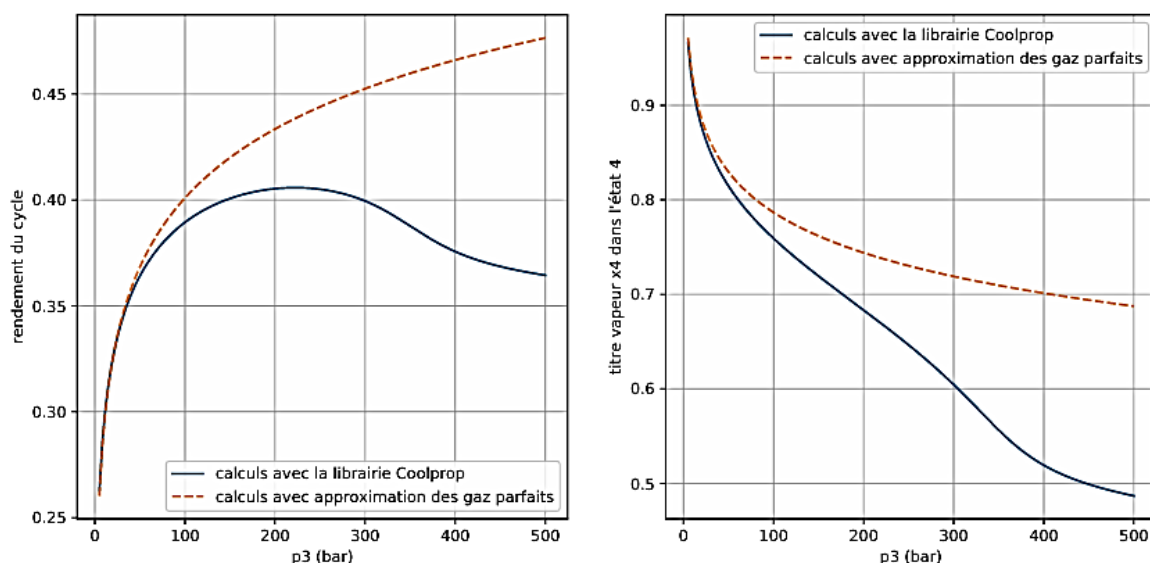
39 - Donner l'expression du titre massique en vapeur  $x_4$  au point 4, en fonction de grandeurs parmi celles ci-dessus.

40 - Même question pour l'enthalpie massique  $h_4$  au point 4.

Nous avons alors toutes les grandeurs nécessaires au calcul du rendement  $\eta$ . Les applications numériques donnent  $h_3 = 3350 \text{ kJ/kg}$ ,  $x_4 = 0,77$ ,  $h_4 = 2044 \text{ kJ/kg}$ , et  $\eta = 0,41$ , ce qui n'est pas très éloigné de ce qui est obtenu sans approximation en utilisant le diagramme (partie III.1).

Le graphique du document 12 compare les valeurs du rendement  $\eta$  et du titre  $x_4$  obtenues avec les approximations faites dans cette partie III.2 (gaz parfait, etc.), et obtenues avec un calcul beaucoup plus exact (qui revient à utiliser le diagramme, partie III.1).

41 - À votre connaissance, dans quel domaine de température et de pression le modèle du gaz parfait est-il approprié ? En quoi ceci se retrouve-t-il ici ?

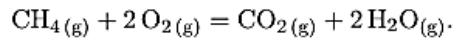


**Document 12 :** rendement du cycle (à gauche) et titre en vapeur dans l'état 4 (à droite) en fonction de la valeur choisie pour la pression  $p_3$ . Ici  $T_3 = 700 \text{ K}$  est fixé et l'état 1 est toujours le même. Courbes en traits pointillés : d'après les expressions approchées établies dans la sous-partie III.2. Courbes en traits pleins : calculs réalisés avec la librairie Coolprop (qui sert aussi au tracé du diagramme  $T$ - $s$  de l'énoncé).

### III.4 Consommation en méthane

Cette sous-partie s'intéresse à la consommation en combustible de la centrale.

Dans le cas d'une centrale au gaz, le combustible brûlé est du méthane  $\text{CH}_4(g)$ , de masse molaire  $M = 16 \text{ g/mol}$ . La réaction de combustion s'écrit :



Le Pouvoir calorifique du méthane est :  $PC(\text{CH}_4) = 800 \text{ kJ.mol}^{-1}$

**44 -** Donner l'expression du transfert thermique  $Q$  libéré par la combustion isobare et isotherme d'une quantité de matière  $n_0$  de  $\text{CH}_4(g)$ .

**45 -** La chaudière de la centrale doit produire 150 MW de puissance thermique. Établir alors l'expression de la quantité de matière  $n_0$  de  $\text{CH}_4$  consommée dans la chaudière pour une heure de fonctionnement.

On admet que l'application numérique donne  $n_0 \simeq 7 \times 10^5 \text{ mol}$ .

**46 -** En déduire la valeur de la masse de méthane consommée pour une heure de fonctionnement.

