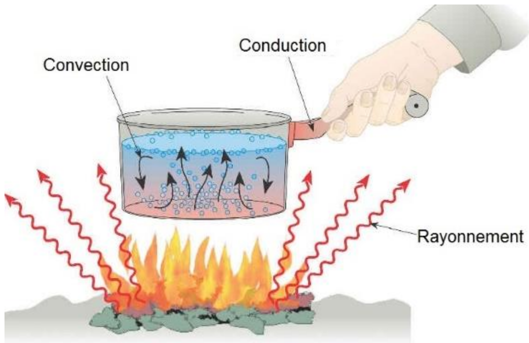
T6 CONDUCTION THERMIQUE

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'évaluer la conductivité thermique d'un matériau.**
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.
Équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle	Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.
Ondes thermiques	Établir une distance ou un temps caractéristique d'atténuation en utilisant le modèle de l'onde plane en géométrie unidirectionnelle.

I) DEFINITIONS ET LOI DE FOURIER

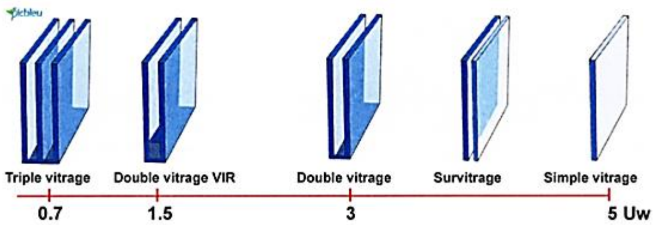
I)1) Différents modes de transfert thermique



3 modes de transfert thermique d'un système avec l'extérieur :

<u>Conduction thermique</u> = **diffusion thermique** : l'énergie thermique se transmet **de proche en proche** dans un milieu (agitation des molécules), sans déplacement macroscopique de matière. Exemple : au travers d'un mur ou d'une vitre.

⇨ Comment **diminuer la conduction thermique** ?
Isoler permet de diminuer la conduction thermique.
Exemples :
- ✓ Le **gant isolant thermique** permet de ne pas se brûler
- ✓ les **double ou triple vitrage** permettent de diminuer les pertes thermiques à travers une vitre



⇨ **Augmenter la conduction thermique** permet notamment de **refroidir un système.** Comment augmenter la conduction thermique ?
- ✓ Le **dissipateur thermique** permet d'augmenter la surface d'échanges thermiques

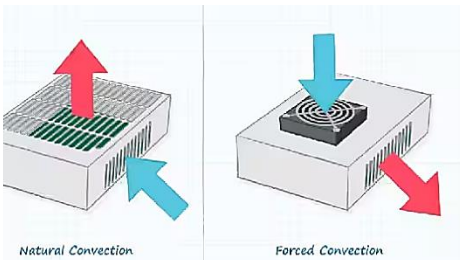
<u>Convection thermique</u> = l'énergie thermique est transportée grâce au **déplacement macroscopique d'un fluide**.

- **<u>Convection naturelle</u>** : due à des **inhomogénéités de température** dans le milieu. Exemple : le convecteur électrique.

- **<u>Convection forcée</u>** : dans le cas où le **mouvement du fluide** est dû à une cause externe.

Exemple : circuit de refroidissement.

⇨ **Augmenter la convection thermique** permet notamment de **refroidir un système**. Comment augmenter la convection thermique ?
Passer de la convection naturelle à la convection forcée permet d'augmenter la convection.
Exemple : Refroidissement d'un processeur par ventilation.



<u>Rayonnement thermique</u> = rayonnement électromagnétique émis par un corps à une température T ; **seul transfert thermique** pouvant avoir lieu **dans le vide (sans support matériel)**

Tous les corps **rayonnent de l'énergie électromagnétique**, de façon d'autant plus importante que leur **température augmente,** la longueur d'onde et la puissance rayonnée dépendant de la température.

Exemples : Soleil, Corps humain rayonnant dans l'IR, lampe à filament dans l'IR et le visible, plus généralement couleur des objets lorsqu'ils rayonnent dans le visible.

I)2) Loi de Fourier

L'énergie thermique se propage des zones chaudes vers les zones froides.

La conduction thermique est d'autant plus importante que :

- La variation spatiale de température ou **gradient de température** est important(e),
- La **surface d'échange** est importante,
- Le matériau est un bon **conducteur thermique**.

On définit le **vecteur densité de flux thermique** $\boldsymbol{\overrightarrow{j_Q}}$:

$\overrightarrow{j_Q}(M,t) = -\lambda.\overrightarrow{gradT}(M,t)$ ou $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda.\overrightarrow{gradT}}}$ **Loi de Fourier**

$\boldsymbol{\lambda}$: **conductivité thermique** du matériau ($W.m^{-1}.K^{-1}$)

On définit la **Puissance thermique** ou **Flux thermique** échangé(e) $\boldsymbol{\Phi_Q}$: schéma dS, $\overrightarrow{dS}$, $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$

$\Phi_Q(M,t) = \iint_S \overrightarrow{j_Q}(M,t).\overrightarrow{dS}$ ou $\boldsymbol{\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{j_Q}.\overrightarrow{dS}}$ en watts (W)

Vérification homogénéité :

Ordres de grandeurs de conductivités thermiques pour différents matériaux :

Aluminium	200 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Conducteur thermique
Acier	40 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Conducteur thermique
Béton	1 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Mauvais isolant thermique
Verre	0,8 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Mauvais isolant thermique
Bois	0,2 $W.m^{-1}.K^{-1}$	
Air	0,03 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Isolant thermique
Laine de verre	0,04 $W.m^{-1}.K^{-1}$	Isolant thermique

I)3) Analogie électrique

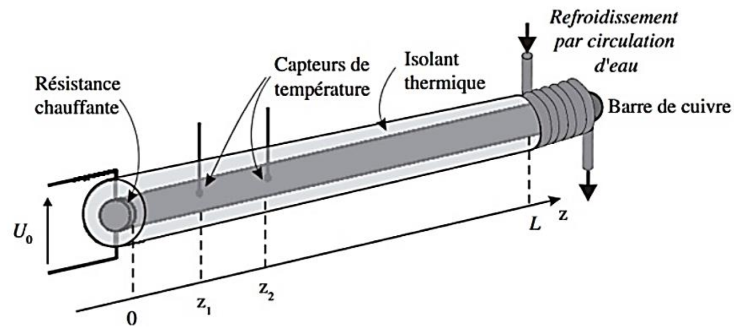
Grandeur thermique	Grandeur électrique
$\overrightarrow{J_Q} = -\lambda.\overrightarrow{gradT}$ Densité de flux thermique (W.m^{-2})	$\overrightarrow{J_e} = -\sigma.\overrightarrow{gradE}$ Densité de courant (A.m^{-2})
T Température (K)	V Potentiel électrique (V)
λ Conductivité thermique (W.m^{-1}.K^{-1})	σ Conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)
$\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{J_Q}.\overrightarrow{dS}$ Flux ou puissance thermique (W)	$I = \iint_S \overrightarrow{J_e}.\overrightarrow{dS}$ Intensité électrique (A)
R_{th} Résistance thermique (K.W^{-1})	R Résistance électrique (Ω ou V.A^{-1})

I)4) Resistance thermique

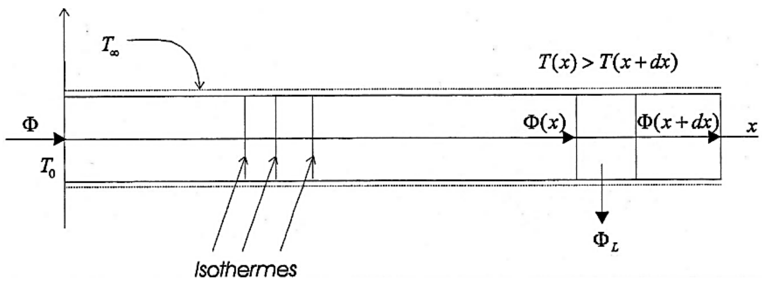
On considère une barre cylindrique de longueur L et de section S, calorifugée latéralement.

⇨ La **propagation** de la chaleur se fait de manière **unidimensionnelle**.

Exemple de réalisation :



Paramétrage :



Conditions aux limites : $T(x=0)=T_0$ $T(x=L)=T_1$

On étudie le phénomène en **régime stationnaire**.

⇨ $T(x,t)=T(x)$

Bilan des puissances thermiques entrantes dans un élément de longueur dx :

$$\Phi(x)-\Phi(x+dx)$$
$$=\iint_S \overrightarrow{j_Q}(x).\overrightarrow{dS} - \iint_S \overrightarrow{j_Q}(x+dx).\overrightarrow{dS}$$
$$=\iint_S -\lambda.\overrightarrow{gradT}(x).\overrightarrow{dS} - \iint_S -\lambda.\overrightarrow{gradT}(x+dx).\overrightarrow{dS}$$
$$=\iint_S -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}(x).\vec{u}_x.\overrightarrow{dS} - \iint_S -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}(x+dx).\vec{u}_x.\overrightarrow{dS} = -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x)+\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x)dx$$

Régime stationnaire

⇨ $\Phi(x)=\Phi(x+dx)$
⇨ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x)=0$
⇨ $\boldsymbol{T(x)=ax+b}$

Conditions aux limites : $T(x=0)=T_0$ $T(x=L)=T_1$

$T(0)=T_0=a$ $T(L)=T_1=aL+b$

⇨ $a=\frac{T_1-T_0}{L}$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{T(x)=\frac{T_1-T_0}{L}x+T_0}}$

$T(x)$ en fonction de x :

Flux thermique $\Phi(x)$:

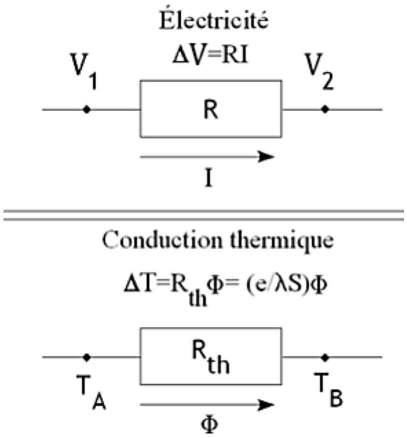
$$\Phi(x) = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x) = -\lambda S\left(\frac{T_1 - T_0}{L}\right) = \lambda S\left(\frac{T_0 - T_1}{L}\right)$$

D'où :

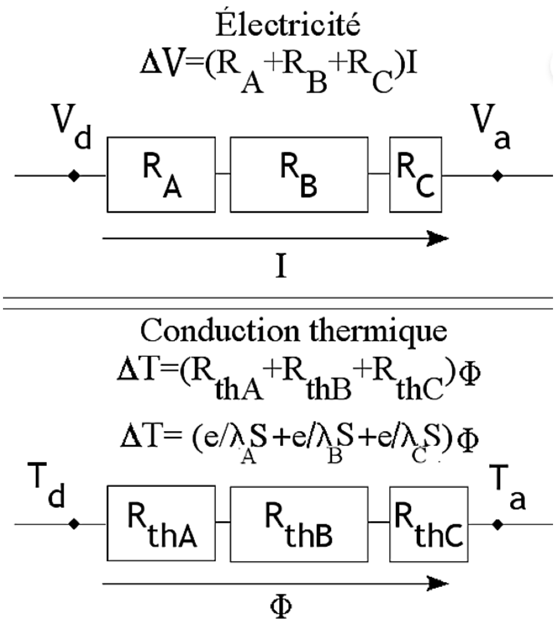
$T_0 - T_1 = \Phi.\frac{L}{\lambda S} = \Phi.R_{th}$ avec :

$\boldsymbol{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$ **résistance thermique (K.W^{-1})**

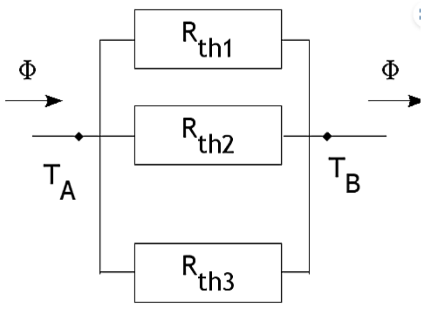
Analogie électrique :



Association de résistances thermiques :



Association série



Association parallèle

II) EQUATION DE LA CHALEUR

II)1) Bilan thermique

Absence de source de chaleur.

On réalise un bilan thermique sur une barre cylindrique de longueur L et de section S, calorifugée latéralement.

⇨ La **propagation** de la chaleur se fait de manière **unidimensionnelle**.

Schéma :

Système : Volume élémentaire dV de section S et de longueur dx : $dV = S.dx$

Variation élémentaire d'enthalpie pendant une durée élémentaire dt :

$$d^2H = c_P.dm.dT = c_P.\rho.dV.dT = c_P.\rho.S.dx.[T(x,t+dt) - T(x,t)] = c_P.\rho.S.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt$$

Bilan d'énergie dans un élément de longueur dx pendant la durée dt :

$$\delta^2Q = [\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)]dt = \left[\mathrm{j}_Q(x,t) - \mathrm{j}_Q(x+dx,t)\right]dt = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x)dxdt$$

Premier principe entre les instants t et $t + dt$: $d^2H = \delta^2Q$

$$c_P.\rho.S.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.dx.dt$$

Après simplification :

$$c_P.\rho.\frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\lambda}{c_P.\rho}.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}=0}$$

Equation de la diffusion thermique = Equation de la chaleur

≠ Equation de propagation thermique

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial y}{\partial t}=0$ Equation de propagation d'une onde sur une corde

Généralisation à 3 dimensions :

$$\boldsymbol{\frac{\lambda}{c_P.\rho}.\Delta T-\frac{\partial T}{\partial t}=0}$$

$\boldsymbol{\Delta T}$: Laplacien scalaire de $\boldsymbol{T}$

$\Delta T=\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (voir formulaire analyse vectorielle)

<u>II)2) Coefficient de diffusion thermique</u>

$\frac{\lambda}{c_P.\rho}.\Delta T-\frac{\partial T}{\partial t}=0$ ou

$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{c_P.\rho}.\Delta T=D.\Delta T$

D : coefficient de diffusion thermique ($m^2.s^{-1}$)

<u>II)3) Temps et longueur caractéristiques</u>

$\frac{\partial T}{\partial t}=D.\Delta T$

$\frac{[T]}{[t]}=[D].\frac{[T]}{[L]^2}$

$\frac{1}{[t]}=\frac{[D]}{[L]^2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{\tau}=\frac{D}{L^2}$

$\boldsymbol{\tau=\frac{L^2}{D}}$

$\boldsymbol{\tau}$: **Temps caractéristique de diffusion thermique (s)**

$\boldsymbol{L}$: **Temps caractéristique de diffusion thermique (m)**

$\boldsymbol{D}$ **: Coefficient de diffusion thermique ($\boldsymbol{m^2.s^{-1}}$)**

<u>Exemple :</u> Cuivre D = 117.10^{-6} $m^2.s^{-1}$

Laine de verre D = $1.4.10^{-6}$ $m^2.s^{-1}$

Exemple : Sol $D = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} , Prenons L = 2 m

$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{2^2}{10^{-6}} = 4.10^6 s \approx 1.5\ mois$

Les variations de température au niveau du sol sont ressenties avec 1 mois et demi de retard à 2 m de profondeur.

III) ONDE THERMIQUE

Exemple : Diffusion d'une onde thermique dans le sol

Hypothèses :

- Température T de surface variable en fonction du temps t : périodique, liée aux saisons,
- Température T variable en fonction de la profondeur z,
- D'où : $T = T(z,t)$
- On recherche une fonction $T(z,t)$ solution de l'équation de diffusion thermique

$$T(z,t) = T_0 + \theta(z,t)\ \ avec :$$

$$\theta(z,t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ période temporelle liée aux saisons
- $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\delta$ période spatiale (ou longueur d'onde) liée à la propagation dans le sol
- $\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$ terme d'atténuation de l'onde

On passe en grandeurs complexes :

$$\underline{\theta}(z,t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) = \theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right)$$
$$= \theta_0 \exp(j\omega t) \exp\left(-(1+j)\frac{z}{\delta}\right)$$

T(t), donc $\theta(t)$ solution de l'équation de diffusion thermique :

$\frac{\partial T}{\partial t} - D.\Delta T = 0$ ou $\frac{\partial \theta}{\partial t} - D.\Delta\theta = 0$ ou $\boldsymbol{\frac{\partial \theta}{\partial t} - D.\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0}$ en mode unidimensionnel

$\underline{\theta}(t)$ solution de l'équation :

$\boldsymbol{\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} - D.\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial z^2} = 0}$ (1)

$\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} = j\omega\underline{\theta}$

$\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial z^2} = \left(\frac{-(1+j)}{\delta}\right)^2 \underline{\theta} = \frac{2j}{\delta^2} \underline{\theta}$

En remplaçant dans l'équation (1) :

$j\omega\underline{\theta} - D\frac{2j}{\delta^2}\underline{\theta} = 0$

$\underline{\theta} j \left(\omega - D\frac{2}{\delta^2}\right) = 0$

$\underline{\theta} = 0$ c' est à dire $\underline{\theta}(z,t) = 0$ quels que soient $z \; et \; t$ →absurde

Ou $\omega - D\frac{2}{\delta^2} = 0$ d'où :

$\boldsymbol{\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}}$ **Distance caractéristique d'atténuation de l'onde thermique**

Vérification homogénéité :

Schéma : propagation / atténuation

Ordre de grandeur :

Résolution sans les complexes :

Voir brouillon

IV) ECHANGES CONDUCTO-CONVECTIFS : LOI DE NEWTON

Schéma :

Le modèle est le suivant :

- Dans la paroi : transfert thermique par conduction,
- Dans la couche limite : le fluide est immobile => tranfsfert thermique par conduction dans l'air,
- Au-delà de la couche limite, transfert thermique par convection dans l'air, température constante T_{fluide}.

Régime stationnaire => conservation du flux thermique

Densité de flux thermique j_Q (W.m^{-2}) :

$$j_Q = -\lambda_{paroi}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{paroi} = -\lambda_{fluide}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{couche\ limite}$$

Flux thermique conducto-convectif (W) :

$$\phi_{CC} = -\lambda_{fluide}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{couche\ limite}.S = -\lambda_{fluide}\left(\frac{T_{fluide} - T_{paroi}}{e}\right)\ .S$$

Flux thermique par unité de surface = densité de flux thermique (W.m^{-2}) :

$$\boldsymbol{\varphi_{CC} = -\lambda_{fluide}\left(\frac{T_{fluide}-T_{paroi}}{e}\right) \quad = h.(T_{paroi} - T_{fluide})}$$

$\boldsymbol{h = \frac{\lambda_{fluide}}{e}}$ **, coefficient de transfert conducto-convectif**

$\boldsymbol{h}$ **en W.K^{-1}.m^{2}**