

CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 21 (23 au 27 mars 2026)

Chapitres étudiés et questions de cours :

EM2 : Magnétostatique et Conduction électrique

T6 : Conduction thermique

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1^{ère} question de cours : questions 1 à 9

2^{ème} question de cours : questions 10 à 14

Rappel : les expressions de la divergence et du gradient doivent être connues, en coordonnées cartésiennes. Elles sont fournies en coordonnées cylindriques.

$f(x, y, z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x, y, z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \\ A_z \end{vmatrix}$

On introduit le "vecteur" nabla : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de

retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\vec{\text{grad}} f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div } \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base : $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right] \cdot \vec{u}_r + \left[\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right] \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right] \cdot \vec{u}_z$$

- 1) Enoncer les règles de symétrie de la distribution de courant et du champ magnétostatique \vec{B} .

Tout plan de symétrie Π pour les courants est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique \vec{B} .

Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan de symétrie des courants, le champ \vec{B} est perpendiculaire à ce plan.

Tout plan d'antisymétrie Π^* pour les courants (plan qui transforme les courants en leurs opposés) est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique \vec{B} .

Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan d'antisymétrie des courants, le champ \vec{B} est contenu dans ce plan.

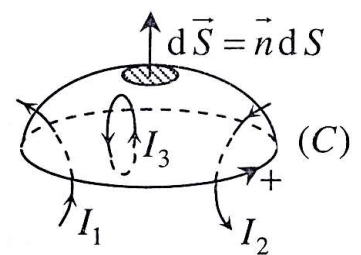
- 2) Enoncer le Théorème d'Ampère.

Théorème d'Ampère (forme intégrale) :

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale au produit de μ_0 par l'intensité I_e enlacée, intensité qui traverse une surface S orientée s'appuyant sur (C).

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I_e \text{ avec } I_e = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide



- 3) Donner l'équation de conservation de la charge.

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = 0$$

\vec{j} : densité de courant ($A \cdot m^{-2}$)

ρ_l : densité volumique de charges libres ($C \cdot m^{-3}$)

4) Donner la loi d'ohm sous forme locale.

Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur : $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

\vec{E} : champ électrique (V.m⁻¹)

\vec{j} : densité de courant (A.m⁻²)

σ : conductivité électrique (Ω⁻¹.m⁻¹)

5) Donner les 4 équations de Maxwell.

Equation	Statique Présence de sources	Remarques	Variable Quelconque Présence de sources
Maxwell Gauss $\text{div} \vec{E} =$	$\frac{\rho}{\epsilon_0}$	Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell Faraday $\text{rot} \vec{E} =$	$\vec{0}$	La circulation du champ électrostatique est conservative	$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Thomson ou Maxwell Flux $\text{div} \vec{B} =$	0	Le champ magnétique est à flux conservatif	0
Maxwell Ampère $\text{rot} \vec{B} =$	$\mu_0 \vec{j}$	Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I_e$	$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

6) Définir le vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q par la loi de Fourier, la conductivité thermique λ (+ unité), le Flux thermique échangé(e) Φ_Q .

On définit le **vecteur densité de flux thermique** \vec{j}_Q :

$$\vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}(M, t) \text{ ou } \boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}}$$

Loi de Fourier

$$j_Q \text{ en W.m}^{-2}$$

λ : **conductivité thermique** du matériau (W.m⁻¹.K⁻¹)

On définit la **Puissance thermique** ou **Flux thermique** échangé(e) Φ_Q :

$$\Phi_Q(M, t) = \iint_S \vec{j}_Q(M, t) \cdot \vec{dS} \text{ ou } \Phi_Q = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \text{ en watts (W)}$$

7) Donner les 5 analogies entre grandeurs thermiques et grandeurs électriques.

Grandeur thermique	Grandeur électrique
$\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}$ Densité de flux thermique (W.m ⁻²)	$\vec{j}_e = -\sigma \cdot \overrightarrow{\text{grad}E}$ Densité de courant (A.m ⁻²)
T Température (K)	V Potentiel électrique (V)
λ Conductivité thermique (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	σ Conductivité électrique (Ω ⁻¹ .m ⁻¹)
$\Phi_Q = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ Flux ou puissance thermique (W)	$I = \iint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$ Intensité électrique (A)
R_{th} Résistance thermique (K.W ⁻¹)	R Résistance électrique (Ω ou V.A ⁻¹)

8) Donner l'expression de la résistance thermique + unité.

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad \text{résistance thermique (K.W}^{-1}\text{)}$$

L : Longueur ou épaisseur (m)

S : Section ou surface (m²)

λ : **conductivité thermique** du matériau (W.m⁻¹.K⁻¹)

9) Dans le cas de l'échange conducto-convectif, donner l'expression de la densité de flux thermique + unité.

Flux thermique par unité de surface = densité de flux thermique (W.m⁻²) :

$$\varphi_{CC} = -\lambda_{fluide} \left(\frac{T_{fluide} - T_{paroi}}{e} \right) = h \cdot (T_{paroi} - T_{fluide})$$

e : épaisseur de la couche limite

$$h = \frac{\lambda_{fluide}}{e}, \quad \text{coefficient de transfert conducto-convectif}$$

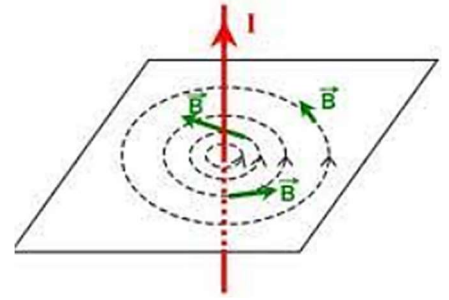
h en W.K⁻¹.m⁻²

10) Cas du fil infini parcouru par un courant d'intensité I : Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.

Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ \vec{B}) : Plan passant par M et contenant Oz

⇒ $\vec{B}(M)$ perpendiculaire à ce plan donc suivant \vec{e}_θ

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ \vec{B}) : Plan passant par M et perpendiculaire à Oz



Invariances : Invariance par translation suivant l'axe z, invariance par rotation autour de l'axe z.

- ⇒ $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de z ni de θ
- ⇒ $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$

Conclusion des symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_\theta$; lignes de champ circulaires, autour de z ; \vec{B} « ortho radial ».

Contour d'Ampère orienté : Cercle d'axe Oz et de rayon r

- ⇒ \vec{B} tangent au cercle
- ⇒ $\|\vec{B}\|$ constant (uniforme) sur tout le cercle

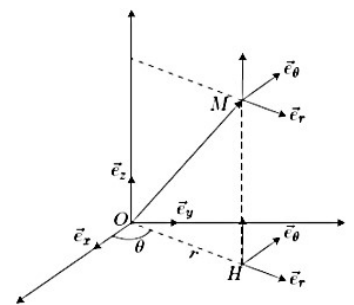
Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} B(r) \cdot \vec{e}_\theta \cdot dl \cdot \vec{e}_\theta = \oint_{(C)} B(r) \cdot dl = B(r) \oint_{(C)} dl = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

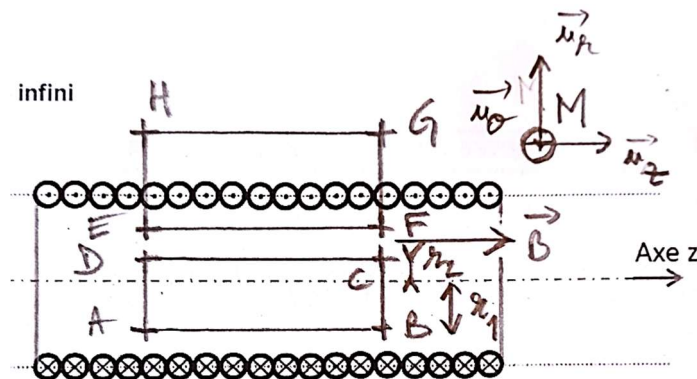
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad \text{Unités : T, A, m}$$

Conclusion :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \vec{B}(M) \text{ orthoradial}$$



11) Cas du fil solénoïde infini parcouru par un courant d'intensité I : Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.



Nombre de spires par unité de longueur : $n = \frac{N}{L}$

Hypothèses : L « infinie » ; enroulement hélicoïdal \Rightarrow les spires peuvent être considérées comme circulaires

Symétries : Tout plan $\Pi (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi$ donc $\vec{B}(M)$ suivant z : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z$ pour tout point M

Antisymétries : Tout plan $\Pi^* (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

Invariances : Par translation suivant z , par rotation suivant θ

Conclusion : $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de r ni de θ : $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{u}_z$ pour tout point M

Hypothèse : $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du solénoïde

- Contour d'Ampère orienté ABCD à l'intérieur du solénoïde, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r_1) \cdot AB + 0 - B(r_2) \cdot CD + 0 = \mu_0 \cdot 0 = 0 \text{ (pas de contour enlacé)}$$

Conclusion : $B(r_1) = B(r_2) = B_{int}$; **Champ uniforme à l'intérieur du solénoïde**

- Contour d'Ampère orienté EFGH, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{EF} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{FG} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{GH} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{HE} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{EF} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{l} = B_{int} \cdot EF = \mu_0 \cdot n \cdot EF \cdot I$$

d'où : $B_{int} = \mu_0 \cdot n \cdot I$

Conclusion : $\vec{B}_{int} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{u}_z$ à l'intérieur du solénoïde

12) Passer de la loi d'ohm sous forme locale à la loi d'ohm sous forme intégrale.

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ avec champ électrique \vec{E} uniforme

$$\text{Or : } \vec{E} = -\overrightarrow{gradV} = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z} \vec{u}_z = -\frac{V(B)-V(A)}{L} \vec{u}_z$$

$$\text{D'où : } E = -\frac{V(B)-V(A)}{L} = \frac{V(A)-V(B)}{L}$$

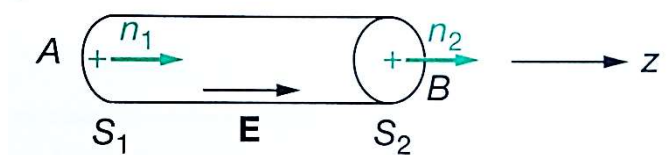
$$\text{On obtient : } I = jS = \sigma E S = \sigma \frac{V(A)-V(B)}{L} S = \frac{\Delta U}{R}$$

Avec :

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

R : résistance électrique (Ω)

σ : conductivité électrique ($\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$)



L : longueur du conducteur (m)

S : section du conducteur (m^2)

13) Propagation de la chaleur dans une barre cylindrique calorifugée : réaliser un bilan de puissances, établir la relation $T(x)$ dans le cas du régime stationnaire.

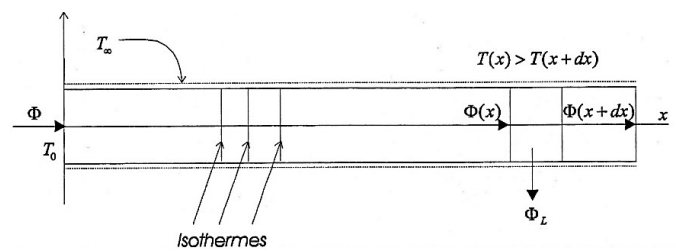
Conditions aux limites : $T(x = 0) = T_0$ $T(x = L) = T_1$

On étudie le phénomène en **régime stationnaire**.

$$\Rightarrow T(x, t) = T(x)$$

Bilan des puissances thermiques entrantes dans un élément de longueur dx :

$$\begin{aligned} & \Phi(x) - \Phi(x + dx) \\ &= \iint_S \vec{J}_Q(x) \cdot \vec{dS} \\ & - \iint_S \vec{J}_Q(x + dx) \cdot \vec{dS} \\ &= \iint_S -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}(x) \cdot \vec{dS} \\ & - \iint_S -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}(x + dx) \cdot \vec{dS} \\ &= \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x) \cdot \vec{u}_x \cdot \vec{dS} \\ & - \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx) \cdot \vec{u}_x \cdot \vec{dS} \\ &= -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x) + \lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx) \\ &= +\lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x) dx \end{aligned}$$



Régime stationnaire

$$\Rightarrow \Phi(x) = \Phi(x + dx)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x) = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = ax + b$$

Conditions aux limites : $T(x = 0) = T_0$ $T(x = L) = T_1$

$$T(0) = T_0 = a \quad T(L) = T_1 = aL + b$$

$$\Rightarrow a = \frac{T_1 - T_0}{L}$$

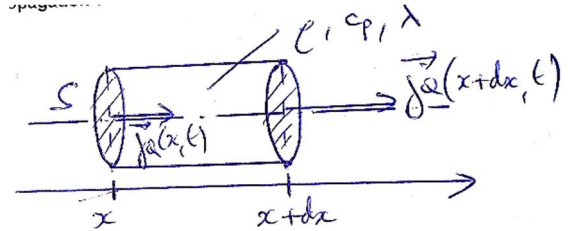
On obtient :
$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0$$

14) Propagation de la chaleur dans une barre cylindrique calorifugée : réaliser un bilan énergétique, établir l'équation de la chaleur, définir le coefficient de diffusion thermique D .

Système : Volume élémentaire dV de section S et de longueur dx : $dV = S \cdot dx$

Variation élémentaire d'enthalpie pendant une durée élémentaire dt :

$$\begin{aligned} d^2H &= c_p \cdot dm \cdot dT = c_p \cdot \rho \cdot dV \cdot dT \\ &= c_p \cdot \rho \cdot S \cdot dx \cdot [T(x, t + dt) - T(x, t)] \\ &= c_p \cdot \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \end{aligned}$$



Bilan d'énergie dans un élément de longueur dx pendant la durée dt :

$$\delta^2Q = [\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)]dt = [j_Q(x, t) - j_Q(x + dx, t)]Sdt = +\lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x) dx dt$$

Premier principe entre les instants t et $t + dt$: $d^2H = \delta^2Q$

$$c_p \cdot \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt = +\lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dt$$

Après simplification :

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Equation de la diffusion thermique = Equation de la chaleur

$$\frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} = D$$

D : coefficient de diffusion thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$)

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

5. Conduction électrique	
Courant dans un conducteur	Définir le vecteur densité de courant. Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire. Énoncer la loi d'Ohm locale. Expliquer l'effet Joule, définir la résistance électrique dans un conducteur et présenter le lien avec la conduction thermique en régime stationnaire. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.

6. Magnétostatique du vide	
Effets magnétiques d'un courant de charges	Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. Définir la notion de ligne de champ magnétostatique. Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique.

	Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution de courant. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique. Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'apprécier la validité du modèle du solénoïde infini.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique. Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'évaluer la conductivité thermique d'un matériau.
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.
Équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle	Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.
Ondes thermiques	Établir une distance ou un temps caractéristique d'atténuation en utilisant le modèle de l'onde plane en géométrie unidirectionnelle.