

CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 22 (30 mars au 03 avril 2026)

Chapitre étudié et questions de cours :

EM3 : Ondes électromagnétiques*

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1^{ère} question de cours : questions 1 à 11

2^{ème} question de cours : questions 12 à 15

- 1) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants.

$$y(x, t) = F(x - ct) \quad \text{avec } F \text{ fonction quelconque}$$

Pour $t = 0$, $y(x, 0) = F(x)$

La fonction F correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } f \text{ fonction quelconque}$$

Pour $x = 0$, $y(0, t) = f(t)$

La fonction f correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

- 2) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

$$y(x, t) = G(x + ct) \quad \text{avec } G \text{ fonction quelconque}$$

Pour $t = 0$, $y(x, 0) = G(x)$

La fonction G correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$$y(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } g \text{ fonction quelconque}$$

Pour $x = 0$, $y(0, t) = g(t)$

La fonction g correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

- 3) Donner le modèle mathématique d'une Onde Progressive Harmonique OPH y de pulsation ω se propageant à la célérité c dans la direction x . Définir les différents termes.

$$y(x, t) = Y_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

$Y_m > 0$ est l'amplitude de l'onde

$\omega > 0$ est la pulsation de l'onde (rad.s⁻¹)

$k > 0$ est la norme du vecteur d'onde (rad.m⁻¹)

φ est la phase à l'origine (rad)

4) Donner les caractéristiques de la « double périodicité » de l'OPH $y(x, t) = Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi]$.

L'OPH $Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi]$ est une fonction « doublement sinusoïdale » :

- A x fixé, elle est une fonction sinusoïdale de t (représentation temporelle = chronogramme), de **pulsation temporelle ω** .
- A t fixé, elle est une fonction sinusoïdale de x (représentation spatiale = photo), de **pulsation spatiale k** .

L'OPH possède donc une **double périodicité**, spatiale et temporelle.

	Pulsation	Fréquence	Période
Temporel	ω	f	T
Spatial	$k = \frac{\omega}{c}$	$\sigma = \frac{f}{c}$	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$

5) Donner le modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH).

Forme mathématique générale d'une **Onde Stationnaire Harmonique (OSH)** :

$$y(x, t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Pour une Onde Stationnaire Harmonique (OSH), les termes dépendant du temps $\cos(\omega t + \varphi)$ et de l'espace $\cos(kx + \psi)$ sont **découplés**, contrairement à l'OPH.

Le terme $Y_m |\cos(kx + \psi)|$ représente l'amplitude de vibration locale en x .

6) Donner les 4 équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\text{Maxwell Gauss : } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Maxwell Faraday : } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{Maxwell Thomson : } \text{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Maxwell Ampère : } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

- 7) Cas d'une Onde Plane Progressive Harmonique OPPH (= une seule fréquence) ou Monochromatique OPPM (= une seule couleur), avec propagation selon l'axe x , dans le sens des x croissants :

Ecrire mathématiquement $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

Définir les différents termes introduits.

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec } E_0 = \text{cte}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0')$$

ω : pulsation temporelle (rad.s⁻¹)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: période temporelle (s)

φ_0, φ_0' : phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$k = \|\vec{k}\|$ avec $\vec{k} = \|\vec{k}\| \cdot \vec{n} = \|\vec{k}\| \cdot \vec{u}_x$ vecteur d'onde (m⁻¹) dans le sens de la propagation

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: période spatiale ou longueur d'onde (m)

- 8) Pour une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec } E_0 = \text{cte}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec } B_0 = \text{cte}'$$

Ecrire $\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t), \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{div} \vec{E}, \text{div} \vec{B}, \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E},$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$ en notations complexes.

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{E}_0 \exp j(\omega t - kx)$$

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{B}_0 \exp j(\omega t - kx)$$

Dérivées temporelles :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{B}}$$

Dérivées spatiales :

$$\text{div} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$\text{div} \underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

- 9) Onde électromagnétique : Quels sont les relations reliant \vec{B} à \vec{E} ?

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{MF}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{MA}$$

Ou : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ dans le cas d'une OPPM (relation de structure)

10) Définir le vecteur de Poynting et la puissance rayonnée par une onde électromagnétique.

Le vecteur de Poynting \vec{R} représente la densité surfacique de puissance rayonnée :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{Unité : W.m}^{-2}$$

La puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface correspond au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{ray} = \iint_S \vec{R} \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{dS} \quad \text{Unité : W}$$

11) Donner le modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH) électromagnétique.

$$\vec{E}_T(x, t) = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_T(x, t) = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z$$

12) Soit une onde stationnaire modélisée par la fonction suivante :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

- Définir l'amplitude locale de vibration $A(x)$.
- En déduire la position des ventres de vibration en fonction de la longueur d'onde λ et d'un nombre entier n . Quelle distance sépare 2 ventres ?
- Même question pour les nœuds de vibration. Quelle distance sépare 2 nœuds ?
- Quelle distance sépare un ventre et un nœud ?

a) $A(x) = A |\cos(kx)|$

b) Ventre : $|\cos(kx)| = 1$ ou $\cos(kx) = \pm 1$ ou $kx = n\pi$, on obtient $x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi c}{\omega} = \frac{n\pi c T}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$; deux ventres séparés par $\frac{\lambda}{2}$.

c) Nœud : $|\cos(kx)| = 0$ ou $\cos(kx) = 0$ ou $kx = \frac{\pi}{2} + n\pi$, on obtient $x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$; deux nœuds séparés par $\frac{\lambda}{2}$.

d) Un ventre et un nœud séparés par $\frac{\lambda}{4}$.

13) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de \vec{E} dans le vide.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \vec{\Delta}(\vec{E}) \quad (5) \quad (\text{fourni})$$

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \vec{\nabla}^2(\vec{E}) \text{ Laplacien vectoriel de } \vec{E} \text{ (voir Analyse Vectorielle) :}$$

Laplacien vectoriel $\Delta \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta} \vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.
---	--	--	---

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

(2) $\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On a aussi :

En l'absence de charges :

(5) $\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta}(\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(0) - \vec{\Delta}(\vec{E}) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$

D'où :

$$-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{E})$$

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

AVEC $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

14) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de \vec{B} dans le vide.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \vec{\Delta}(\vec{B}) = -\vec{\Delta}(\vec{B}) \quad (\text{fourni})$$

$\vec{\Delta}(\vec{B}) = \vec{\nabla}^2(\vec{B})$ Laplacien vectoriel de \vec{B} (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta} \vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.
---	--	--	---

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

(4) $\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

On a aussi :

D'où :

$$-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{B})$$

$$\vec{\Delta}(\vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

15) Montrer que le champ $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ associé à une OPPM vérifie l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$ et suppose une relation entre k, ω et c .

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

$$B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx)$$

Grandeur complexe temporelle associée : $\underline{B}(x, t) = B_0 \exp(j\omega t - kx)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{B}}{\partial x} = -jk \underline{B} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = j\omega \underline{B} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{B}$$

\underline{B} vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2 \underline{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{B} = 0$$

$$\underline{B} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{B}(x, t) = 0 \text{ ou } -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = \pm \frac{\omega}{c} \text{ Relation de structure}}$$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

12 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	
Force de Lorentz. Formes locales des équations de Maxwell dans le vide.	Simplifier les équations de Maxwell, fournies et admises, dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Identifier les équations qui font apparaître un couplage entre les champs électrique et magnétique. Identifier et interpréter qualitativement les équations qui font apparaître un couplage entre les champs électrique ou magnétique et les distributions de charges ou de courant.
Équation de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Cas des ondes planes.	Exprimer la célérité des ondes électromagnétiques en fonction des constantes fondamentales à partir de l'équation de propagation fournie. Montrer que l'équation de propagation des champs électrique et magnétique se ramène à une équation de d'Alembert unidimensionnelle dans le cas d'une onde plane.
Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement. Vecteur d'onde, longueur d'onde.	Démontrer la relation de dispersion de l'onde. Exploiter l'expression du champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement pour identifier la direction de propagation et la direction de polarisation.
Spectre des ondes électromagnétiques.	Identifier en ordre de grandeur les intervalles en fréquence ou en longueur d'onde des domaines : ondes radio, infra-rouge, visible, ultra-violet, rayons X, rayons gamma.
Caractère transverse des champs. Relation entre le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur d'onde d'une onde plane progressive monochromatique (relation de structure).	Démontrer le caractère transverse des champs électrique et magnétique dans le cas d'une onde plane. Établir la relation de structure dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement. Exploiter la relation de structure pour déterminer le champ électrique connaissant le champ magnétique, ou réciproquement, pour une onde plane progressive monochromatique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Équation locale de Poynting dans le vide. Puissance surfacique moyenne transportée par l'onde.	Exprimer la puissance rayonnée à travers une surface à l'aide du vecteur de Poynting. Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeurs de puissance surfacique moyennes transportées par une onde électromagnétique (laser hélium-néon, flux solaire). Établir l'équation locale de Poynting unidimensionnelle pour une onde plane polarisée rectilignement dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Admettre son expression la plus générale dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Par analogie avec d'autres équations locales de conservation, faire le lien avec la conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide.
Conversion d'énergie électromagnétique en énergie électrique.	Décrire l'effet photovoltaïque. À partir de la caractéristique courant-tension d'une cellule photovoltaïque, déterminer les valeurs de la tension et du courant qui maximisent la puissance électrique fournie. Déterminer la valeur du rendement maximum, les données nécessaires étant fournies.