Géométrie élémentaire du plan

Produit scalaire

Définition géométrique : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ sinon.

Bilinéarité, symétrie.

Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale.

Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

Déterminer une mesure d'un angle non orienté.

Caractériser le cercle de diamètre $[AB]$.

Déterminant dans une base orthonormée directe

Définition géométrique : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ sinon.

Bilinéarité, antisymétrie.

Interpréter un déterminant en termes d'aire orientée d'un parallélogramme.

Caractériser la colinéarité de deux vecteurs.

Calculer le déterminant dans une base orthonormale directe.

Droites

Définition, vecteur directeur, vecteur normal.

Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.

Passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne et inversement.

Déterminer l'intersection de deux droites.

Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Calculer la distance d'un point à une droite.

Exercices

Exercice 1. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note Δ_m la droite d'équation cartésienne $(m+1)\,x - (1-m)\,y = 2m$.

Montrer que toutes les droites Δ_m passent par un même point que l'on précisera.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite Δ_m avec la droite d'équation $y = m\,x$.

Exercice 2. Dans un parallélogramme $ABCD$, prouver la relation : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice 3. Dans un repère orthonormal direct, on considère les points $A\,(-1;-1)$, $B\,(2;3)$ et $C\,(3;-3)$.

Calculer l'aire du triangle ABC.

En déduire la distance de A à la droite (BC).

Déterminer une équation de la droite (AB).

En déduire la longueur de la hauteur issue de C, et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC.

Exercice 4. Soient $A\,(4,-4)$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.

On peut mener par le point A deux tangentes à $\mathscr{C}$, qui coupent ce cercle en les points B et C.

Montrer que $BC^2 = 10$.