Polynômes

Polynômes à une indéterminée

Notion de polynôme d'indéterminée X définie par la liste de ses coefficients.

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé).

Opérations : somme, produit et composée.

Polynôme dérivé.

Degré d'une somme ou d'un produit de polynômes, degré du polynôme dérivé.

Polynômes dérivés successifs.

Notation $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ ou $\sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$.

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Formule de TAYLOR. Formule de LEIBNIZ.

Racines

Racine (ou zéro) d'un polynôme.

Multiplicité d'une racine.

Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en α de l'ordre de multiplicité de la racine α .

Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré.

Expression de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

Cas des polynômes de degré deux.

Déterminer les racines d'un polynôme.

Factorisation par $(X - \alpha)$ lorsque α est racine.

Exercices

Exercice 1. Soit $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$.

Vérifier que 1 est racine de P , et déterminer sa multiplicité.

En déduire une expression factorisée de P .

Exercice 2. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation (E) : $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est solution de (E), quel est le coefficient de X^n du polynôme $(X^2 + 1)P'' - 6P$?

En déduire que si P est une solution non nulle de (E), alors $\deg(P) = 3$.

À quelles conditions sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ le polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est-il solution de (E)?

Exercice 3. Le polynôme $P = 4X^3 - 4X^2 - 15X + 18$ admet une racine double α et une racine simple β .

Déterminer la valeur de α et en déduire celle de β .