

Polynômes

Polynômes à une indéterminée

Notion de polynôme d'indéterminée X définie par la liste de ses coefficients.

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé).

Opérations : somme, produit et composée.

Polynôme dérivé.

Degré d'une somme ou d'un produit de polynômes, degré du polynôme dérivé.

Polynômes dérivés successifs.

Notation $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ ou $\sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$.

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Formule de TAYLOR. Formule de LEIBNIZ.

Racines

Racine (ou zéro) d'un polynôme.

Multiplicité d'une racine.

Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en α de l'ordre de multiplicité de la racine α .

Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré.

Expression de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

Cas des polynômes de degré deux.

Déterminer les racines d'un polynôme.

Factorisation par $(X - \alpha)$ lorsque α est racine.

Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples.

Polynôme scindé sur \mathbb{K} .

Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.

Polynômes irréductibles. Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

Factorisation par $(X - \alpha)^m$ lorsque α est racine de multiplicité m .

Fractions rationnelles

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle F ; détermination de la partie polaire de F relative à un pôle α .

Exemples de décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} ou \mathbb{R} d'une fraction rationnelle à coefficients réels, lorsque les pôles complexes sont d'ordre 1 ou 2.

Calcul de la partie polaire en un pôle simple. Aucune connaissance n'est exigible dans le cas de pôles d'ordre supérieur.

L'objectif est la mise en pratique sur des cas simples.