Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs.
Famille libre, famille finie.

Notation $\mathrm{Vect}\,(F)$.
Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée.

Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre ;
(ii) le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale ;
(iii) le nombre de pivots est égal à p.

Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$;
(ii) pour toute matrice colonne B à n lignes, le système $AX = B$ est compatible ;
(iii) le nombre de pivots est égal à n.

Déterminer un système d'équations linéaires de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Matrices : opération et propriétés

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.
Produit de deux matrices.
Propriétés.

Notation $\mathscr{M}_{n,p}\,(\mathbb{K})$.

Exercices

Exercice 1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u = (1, 3, 3)$, $v = (1, -1, 4)$, $w = (3, 1, m)$ de $\mathbb{R}^3$ forment-ils une famille libre ?

Lorsqu'elle est liée, exprimer w comme combinaison linéaire de u et v.

Exercice 2. Déterminer une équation de $\mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -2, 1)$.

Indication : on pourra chercher à quelle condition (u, v, w) *est liée, avec* $w = (a, b, c)$ *.*

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Question préliminaire : quel est le nombre de lignes et de colonnes de B *?*

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 et conjecturer l'expression de A^n pour $n \geq 1$.

Établir ce résultat pour $n \geq 1$.