Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;

(ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;

(iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.

Expression de $\det(\lambda A)$ pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.

Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes ou en lignes.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

Déterminant d'un produit de matrices carrées.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ; déterminant de l'inverse.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne du déterminant d'une matrice.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée ; valeurs propres [1].

Espaces vectoriels

Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^I = \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.

Sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation.

Sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Intersection de sous-espaces vectoriels.

Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

La somme $F + G$ est dite directe si l'écriture de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Sous-espaces supplémentaires.

Famille libre, famille liée.

Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Bases.

Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Dans un espace de engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Dimension.

Dimensions de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

1. cf TD 15

Si E est de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.

Exercices

Exercice 1 (TD de Mme Guillemain)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel

$$E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos^2 x, x \mapsto \sin^2 x\right).$$

Les fonctions suivantes appartiennent-elles à E ?

$$f_1 : x \mapsto 1,\ f_2 : x \mapsto \sin(2x),\ f_3 : x \mapsto \cos(2x),$$
$$f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^x,\ f_5 : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 2 (TD de M. Massa)**.** Donner une famille génératrice, puis une base, de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + z = 0\right\}.$$
$$G = \{(a, a+b, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3 (TD de M. Massa)**.** Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}\left((1, 2, -1, 1), (-3, -2, 3, 2), (-1, 0, 1, 1), (2, 3, -2, 1)\right).$$

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est égal à $X^4 - 5X^3$.

Montrer que les ensembles $F = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \ : \ AX = 0\right\}$ et $G = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \ : \ AX = 5X\right\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer une famille génératrice, puis une base de F et G.

Exercice 5. Montrer que le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

est égal au produit $a_1 a_2 a_3 a_4$.

On précisera les propriétés du déterminant utilisées.