Espaces vectoriels de dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un K-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.

Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Dans un espace de engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Dimension.

On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.

Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si E est de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus, $F = E$ si et seulement si les dimensions sont égales.

Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.

Supplémentaires d'un sous-espace. Existence, dimension commune.

Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par l'intersection nulle et la somme des dimensions.

Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.