

Séries de Fourier

Une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$ correspondant.

Une fonction T -périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur une période.

Intégrale sur une période d'une fonction T -périodique et continue par morceaux.

Coefficients de FOURIER trigonométriques d'une fonction T -périodique f continue par morceaux.

Cas des fonctions paires, impaires.

Sommes partielles de FOURIER d'une fonction f définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n(f) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Théorème de PARSEVAL : si f est une fonction T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, et

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Théorème de DIRICHLET : si f est une fonction T -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h)).$$

Cas où f est de plus continue sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique.

Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k .

Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne de f sur une période.

Dans certains cas, les calculs peuvent être simplifiés en considérant l'intégrale $d_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt$.

Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h))$.

Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.