Réduction des endomorphismes

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Matrice de passage entre deux bases.

Matrice d'un endomorphisme dans une base. Effet d'un changement de bases. Matrices semblables.

Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Deux matrices semblables ont même déterminant. Déterminant d'un endomorphisme.

Trace d'une matrice. Linéarité. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme.

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.

Définition choisie dans le cours : $\det(X\mathrm{Id}_E - u)$.

Relations entre la trace et le déterminant d'une matrice et les racines de son polynôme caractéristique.

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice ou d'un endomorphisme. Spectre.

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
Notation Sp.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

La multiplicité d'une valeur propre majore la dimension du sous-espace propre associé.

Endomorphisme diagonalisable, trigonalisable.

Matrice diagonalisable, trigonalisable.

Un endomorphisme est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si sa matrice dans une base l'est.

Une somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

La concaténation de bases de sous-espaces propres est une base de leur somme directe.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.

Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Extension de ces résultats au cas des matrices.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Résolution d'un système différentiel $X'(t) = AX(t)$ lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable.