1. Supposons les cercles C_1 et C_2 orthogonaux. Alors $D^2 = R_1^2 + R_2^2$ donc
$$(R_1 + R_2)^2 - D^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 - D^2 = 2R_1R_2 > 0$$
soit $(R_1 + R_2)^2 > D^2$ puis
$$R_1 + R_2 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2} > \sqrt{D^2} = D.$$
De même
$$D^2 - (R_1 - R_2)^2 = D^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2 = 2R_1R_2 > 0$$
soit $D^2 > (R_1 - R_2)^2$ puis
$$D = \sqrt{D^2} > \sqrt{(R_1 - R_2)^2} = |R_1 - R_2|.$$
Avec le rappel de l'énoncé, C_1 et C_2 sont sécants en deux points distincts.
2. Dire que C_1 et C_2 sont orthogonaux signifie que $D^2 = R_1^2 + R_2^2$ ou encore que
$$\Omega_1\Omega_2^2 = A\Omega_1^2 + A\Omega_2^2.$$
D'après le théorème de Pythagore, cela équivaut au fait que les droites $(A\Omega_1)$ et $(A\Omega_2)$ sont orthogonales en A.
Or la tangente D_1 (respectivement D_2) en A à C_1 (respectivement C_2) est la droite orthogonale en A à $(A\Omega_1)$) (respectivement $(A\Omega_2)$), donc les cercles sont orthogonaux si et seulement si ces tangentes D_1 et D_2 sont orthogonales.
3. Posons $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$, de sorte que C_0 a pour équation $f(x, y) = 0$.
   (a) On calcule $f(1, 0) = 1 + 0 - 4 - 0 + 3 = 0$ et $f(1, 2) = 1 + 4 - 4 - 4 + 3 = 0$, donc A et B appartient à C_0.
   (b) On écrit
   $$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 3 = 0$$
   donc une équation de C_0 est
   $$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$
   Ainsi le centre est $\Omega_0(2, 1)$ et le rayon $R_0 = \sqrt{2}$.
   (c) Notons T_A la tangente en A à C_0.
   Un point $M(x, y)$ appartient à T_A si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{\Omega_0A}$ sont orthogonaux. Or
   $$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega_0A} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = -(x - 1) - y$$
   donc une équation de T_A est
   $$x + y = 1.$$
   De même, une équation de la tangente T_B en B à C_0 est
   $$y - x = 1.$$

(d) Ces tangentes sont orthogonales aux tangentes en A et B à C. Elles passent donc par le centre Ω de C. Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 1 \\ y-x & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

donc le centre de C est $\Omega\,(0,1)$.
Le cercle C passe par A et B, donc son rayon est $R=\Omega A=\Omega B$, soit $R=\sqrt{2}$.
Une équation cartésienne de C est alors

$$(x-0)^2+(y-1)^2=2$$

ou encore

$$x^2+y^2-2y-1=0.$$

4. Notons (a,b) les coordonnées du centre d'un cercle C orthogonal à C_1 et C_2, et R son rayon.
L'orthogonalité à C_1 se traduit par définition par $\Omega_1\Omega^2=R_1^2+R^2$ soit

$$(a+1)^2+(b-0)^2=1+R^2$$

soit

$$a^2+b^2+2a=R^2.$$

L'orthogonalité à C_2 se traduit par définition par $\Omega_2\Omega^2=R_2^2+R^2$ soit

$$(a-2)^2+(b-0)^2=4+R^2$$

soit

$$a^2+b^2-4a=R^2.$$

La différence des deux égalités conduit à $6a=0$, donc $a=0$: le cercle C est centré sur l'axe des ordonnées.
On a alors $b^2=R^2$ et une équation de C est

$$x^2+(y-b)^2=b^2$$

et C passe donc par l'origine 0.
Les cercles C sont donc les cercles centrés sur (Oy) (hormis en 0) et passant par l'origine.

5. On considère les cercles C_1 d'équation $(x-2)^2+y^2=1$ et C_2 d'équation $(x+3)^2+y^2=6$.

(a) On procède comme à la question précédente.
On a les conditions

$$(a-2)^2+b^2=1+R^2=a^2+b^2-4a+4$$

et

$$(a+3)^2+b^2=6+R^2=a^2+b^2+6a+9$$

qui équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2-4a & = & R^2-3 \\ a^2+b^2+6a & = & R^2-3 \end{array}\right.$$

ou encore à

$$a=0 \quad \text{et} \quad R=\sqrt{b^2+3}.$$

Les cercles cherchés sont centrés en $(0, b)$ et ont pour rayon $R = \sqrt{b^2+3}$ donc ce sont les cercles d'équation

$$x^2 + (y-b)^2 = b^2 + 3$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - 2by = 3.$$

(b) non traité

(c) Tous les cercles précédents passent par (a, y) si, pour tout b, on a $x^2 + y^2 - by = 3$, ce qui donne $-y = 0$ et $x^2 + y^2 = 3$, soit $(x, y) = \left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$.