Fonctions réelles d'une variable réelle

Opération sur les fonctions. Composition.

Bijection entre deux ensembles. Fonction réciproque.

Tracer le graphe d'une fonction réciproque.

Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.

Fonctions circulaires directes : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude de la fonction tan.

Fonctions hyperboliques directes : ch, sh et th.

Définition et étude de la fonction arctan.

Graphe de ces fonctions.

Équations différentielles linéaires

Équation différentielle linéaire $y' + a(x)\,y = b(x)$, où a et b sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Utiliser le principe de superposition ou la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$, où a et b sont des nombres réels, et f une application continue à valeurs réelles ou complexes.

Donner et résoudre l'équation caractéristique.

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{\omega\,x}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Exercices

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 4y' + 4y & = & \exp(2x) \\ y(0) = y'(0) & = & 0 \end{array}\right. .$$

On pourra chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto \left(ax^2 + bx + c\right)\exp(2x)$.

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ty'(t) + 2y(t) & = & \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(1) & = & 1 - \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. .$$

Exercice 3. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution.

La déterminer.

Exercice 4. Étude conjointe des fonctions sh et ch .