

## Nombres complexes

Partie réelle et imaginaire, forme algébrique.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.

Opérations sur les nombres complexes.

Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.

Module d'un nombre complexe. Relation  $|z|^2 = z\bar{z}$ .  
Module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire.

Définition de  $e^{i\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ , formules d'EULER.

Description de l'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1.

Relation  $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ . Formule de MOIVRE.

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe :  
 $e^z = e^x e^{iy}$  où  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Arguments d'un nombre complexe non nul.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Arguments d'un produit, d'un quotient.

Racines carrées d'un nombre complexe.

Équation du second degré dans  $\mathbb{C}$ .

Racines de l'unité : définition, description, propriétés.

Description des racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe.

Interpréter géométriquement les transformations

$$z \mapsto z + b ; z \mapsto az ; z \mapsto \bar{z}$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes.

## Exercices

**Exercice 1.** Résoudre  $z^2 + (8i - 1)z - 8i = 0$  sachant qu'une des racines est réelle.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^6 + (8i - 1)z^3 - 8i = 0$ .

**Exercice 2.** Linéariser  $\cos^2(t) \sin^2(t)$ .

En déduire que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{16}$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : z \mapsto (-1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + 2i$ .

Résoudre  $f(\omega) = \omega$ .

Quelle est la nature de la transformation du plan définie par  $z' = f(z)$  ?

**Exercice 4.** Calculer la somme et le produit des  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Notations  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ .

Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.

Factoriser  $1 \pm e^{i\theta}$ .

Écrire un nombre complexe non nul sous la forme  $\rho e^{i\theta}$  où  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Transformer  $a \cos(t) + b \sin(t)$  en  $A \cos(t - \varphi)$ .

Représenter graphiquement les racines de l'unité.

Notation  $\mathbb{U}_n$ .

Résoudre l'équation  $z^n = \lambda$ .