Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$

3.1 b) $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$

3.1 c) $x^5-x^3+x^2-1$

3.1 d) $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$

3.1 e) $x^5-x^3-x^2+1$

3.1 f) x^4+x^2+1

3.2 a) $-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$

3.2 b) $-28+21x$

3.2 c) $2-x+x^3-x^4-x^5$

3.2 d) $-1-3x-3x^2+x^3$

3.2 e) $1+x^4$

3.2 f) $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

3.3 a) $-6(6x+7)$

3.3 b) $4(5x+4)(-5x+1)$

3.3 c) $2(3x-4)(10x+3)$

3.3 d) $-8(x+1)(x+16)$

3.4 a) $(x-1)^2$

3.4 b) $(x+2)^2$

3.4 c) $(x+1)(x+2)$

3.4 d) $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x+y-z)(x+y+z)$

3.5 b) $(14x+3y)(-12x+3y)$

3.5 c) $(x+1)(y+1)$

3.5 d) $(x-1)(y-1)$

3.5 e) $(x+y)(x+1)^2$

3.5 f) $(a^2+b^2)(y-4x^2)(y+4x^2)$

3.6 a) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

3.6 b) $-8(x^2+1)(x-4)(x+4)$

3.6 c) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

3.6 d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

3.6 e) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p)=abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times1+3\times1+(-1)\times1=-1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1)=x^2-1$ et $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)=[(x+1)(x-1)]\left[(x+1)\left(x^2-x+1\right)\right]=\left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right)=x^5-x^3+x^2-1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)=\big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big)=x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49=-(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2=(6x+7)[-(6x-1)+6x-7]=-6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2=5^2-(10x+3)^2=(10x+8)(-10x+2)=4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\ldots$

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(x+3y)^2-(13x)^2=(14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y=(x+y)(x^2+2x+1)=(x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1=\big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big)=(x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64=-8\big(x^2+1\big)\left[9x^2-24-8\big(x^2-1\big)\right]=-8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\big(x^2+1\big)-x^2=\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=\big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....