

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a).....	$\boxed{5}$	4.3 a)	$\boxed{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}$	4.5 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{x-1}}$
4.1 b).....	$\boxed{\sqrt{3}-1}$	4.3 b).....	$\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$	4.5 d).....	$\boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}}$
4.1 c).....	$\boxed{-\sqrt{3}+2}$	4.3 c).....	$\boxed{1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}}$	4.5 e).....	$\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
4.1 d).....	$\boxed{\sqrt{7}-2}$	4.3 d)....	$\boxed{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}$	4.5 f).....	$\boxed{-4(x-1)^2}$
4.1 e).....	$\boxed{\pi-3}$	4.3 e).....	$\boxed{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$	4.6 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$
4.1 f).....	$\boxed{ 3-a }$	4.3 f)....	$\boxed{\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}}$	4.6 b).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$
4.2 a).....	$\boxed{20}$	4.3 g).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$	4.7 a).....	$\boxed{-11 + 5\sqrt{5}}$
4.2 b).....	$\boxed{9 + 4\sqrt{5}}$	4.3 h).....	$\boxed{50 - 25\sqrt{3}}$	4.7 b).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{3}}$	4.4.....	$\boxed{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$	4.7 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 d).....	$\boxed{3 + \sqrt{2}}$	4.5 a).....	$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$	4.7 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
4.2 e).....	$\boxed{12\sqrt{7}}$	4.5 b).....	$\boxed{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	4.7 e).....	$\boxed{1 + \sqrt{5}}$
4.2 f).....	$\boxed{12}$	4.8.....		4.7 f).....	$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}$
4.2 g).....	$\boxed{9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}}$				$\boxed{1}$
4.2 h).....	$\boxed{10}$				

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, \sqrt{a} est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3 - a|$, c'est-à-dire $3 - a$ si $a \leq 3$ et $a - 3$ si $a \geq 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{2^2 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x + 2f(x)} = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} ((x-1)^2 - 1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right) \left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$ d'inconnue t , puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.