

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.



Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.

Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $(a + 2)^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | c) a^{12} <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $a^5 - a^6$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.



Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| a) $(3 + i)^2$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | c) $(3 - i)^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(3 - i)^2$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(3 - 2i)^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 5.3



Même exercice.

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.



Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$ | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.



Soient x un réel non nul. On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

- a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

- a) $x^2 + y^2 + z^2$
- b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$
- c) $x^3 + y^3 + z^3$
- d) $(x + y)(y + z)(z + x)$
- e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$
- f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$

Calcul 5.7



Même exercice.

- a) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$
- b) $x^4 + y^4 + z^4$
- c) $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$
- d) $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$
- e) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$