Fiche nº 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.4 d) .... $\boxed{m \text{ donc } m(a-b)/(b-c)}$

6.4 e) .... $\boxed{m \text{ donc } ab/m}$

6.4 f) .... $\boxed{a+b \text{ puis } 2ab/(a+b).}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

6.5 d) .... $\boxed{x^2 - 2mx + 3 = 0}$

6.5 e) .... $\boxed{2x^2 - (4m+1)x + (2m^2 + m - 15) = 0}$

6.5 f) .... $\boxed{m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0}$

6.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.6 b) .... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.6 c) .... $\boxed{m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1}$

6.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.7 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.7 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.8 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

....

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'éqation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x - (a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....