Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

7.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln 3 - 2\ln 2}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln 3 - 2\ln 2}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln 3 + 11\ln 2}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln 5 + 2\ln 2}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5 + 4\ln 2}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln 5 - 2\ln 2}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$

7.4 a) .... $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

7.4 b) .... $\boxed{17 + 12\sqrt{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{0}$

7.4 d) .... $\boxed{0}$

7.5 a) .... $\boxed{8}$

7.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.5 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.5 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.5 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.5 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.6 a) .... $\boxed{-2}$

7.6 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

7.6 c) .... $\boxed{-17}$

7.6 d) .... $\boxed{1}$

7.6 e) .... $\boxed{-1}$

7.6 f) .... $\boxed{e}$

7.7 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.8 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

7.8 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

7.8 c) .... $\boxed{1}$

7.8 d) .... $\boxed{\text{-1}}$

7.9 a) .... $\boxed{x + \ln 2}$

7.9 b) .... $\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.9 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.9 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 e) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

7.10 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}}$

7.10 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

7.10 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

7.10 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

7.10 e) .... $\boxed{\varnothing}$

7.10 f) .... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

....

7.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

....

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

....

7.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3 \times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

....

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

....

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\ln((1+\sqrt{2})^2) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8}\ln(1+\sqrt{2}) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8}\ln\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$.

....

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

....

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

....

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2}\ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

....

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021,+2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2021,+2021[, \quad f(-x) = \ln\frac{2021-x}{2021+x} = \ln\frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln\frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

....

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

....

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty,-5[\,\cap\,\Big(\,]61,+\infty[\,\cap\,]-\infty,-7[\,\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty,-5[\,\cap\Big(\,]-\infty,-7[\,\cup\,]61,+\infty[\,\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty,-7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty,-7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in\,]-\infty,-7[$ et $x_2 \notin\,]-\infty,-7[$.

....