Devoir Surveillé n°4

BCPST 1

13 février 2021

La calculatrice est interdite. Les documents sont interdits. Le sujet comporte 4 pages. Aucune réponse sur le sujet ne sera acceptée.
Les réponses devront être justifiées. Les résultats devront être simplifiés au mieux de vos possibilités.
Si vous détectez ce qu'il vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et notez les dispositions que vous avez prises pour continuer le sujet.
L'énoncé n'est pas ramassé.

Exercice 1. Une grenouille monte un escalier par bonds de une marche ou de deux marches. Pour $n \geqslant 1$, on note F_n le nombre de façons qu'elle a de monter un escalier de n marches et on pose $F_0 = 1$.
Par exemple, pour un escalier de deux marches, elle peut soit faire un bond de deux marches, soit faire deux bonds de une marche. Par conséquent, $F_2 = 2$.

1. Que valent F_1, F_3, F_4 ?

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b que vous déterminerez tels que pour $n \geqslant 1$, $F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n$. On pourra distinguer les façons de monter un escalier de $n+2$ marches selon le dernier bond.

3. Cette relation est-elle encore valable pour $n = 0$?

4. En remarquant que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, déterminer l'expression de F_n en fonction de n.

5. En déduire que $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2. 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x) - x$.

a. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x.$$

2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = a$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

   a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

   b. Résoudre dans l'intervalle $[0, +\infty[$ l'inéquation :

   $$\sqrt{t} \leqslant t.$$

   c. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   d. Démontrer que, pour tout nombre réel t supérieur ou égal à 0,

   $$\sqrt{t} - 1 \leqslant \frac{t-1}{2}.$$

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{a-1}{2^n}.$$

   Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = 2^n(u_n - 1)$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) = \dfrac{\ln(a)}{2^n}$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

   $$-2^{n-1}(u_n - 1)^2 \leqslant \ln(a) - v_n \leqslant 0.$$

   On pourra utiliser la question 1b en posant $u_n = 1 + \varepsilon_n$.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

   $$-\frac{1}{2^{n+1}}(a-1)^2 \leqslant \ln(a) - v_n \leqslant 0.$$

   d. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   e. Établir $u_n - 1 \sim \dfrac{\ln(a)}{2^n}$.

Exercice 3. On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ et on pose } A = \Delta + N.$$

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. a. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

   b. Vérifier que : $P^{-1}\Delta P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Exprimer Δ en fonction de P, D et P^{-1}.

d. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n = PD^nP^{-1}$.

e. Exprimer Δ^n sous forme d'un tableau de nombres.

3. a. Vérifier $\Delta N = N\Delta$.

   b. En utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices, exprimer A^n en fonction de Δ, N et n.

   c. En déduire l'expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ sous la forme d'un tableau de nombres.

4. On note trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = & 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = & -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = & z_n. \end{cases}$$

   On note par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^nU_0$ où M est la matrice identifiée ci-dessus.

   c. Déduire de la question 3c les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On désigne par $q(t)$ la température d'un corps (exprimée en degrés Celsius) à l'instant t exprimé en minutes. A l'instant $t = 0$, le corps dont la température est $100°C$ est placé dans une salle à $20°C$.

1. D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. Le coefficient de proportionnalité K est une constante à déterminer.

   a. Montrer que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E_1) :

$$q'(t) - Kq(t) = -20K.$$

   b. Donner l'expression de $q(t)$ en fonction de K et de t.

   c. Déterminer la valeur de K sachant que la température du corps est de $60°C$ au bout de 10 minutes.

   d. Calculer la durée nécessaire pour que la température du corps atteigne $30°C$.

2. En réalité, la température de la salle, notée $a(t)$ varie aussi en fonction du temps. On supposera

$$a(t) = \gamma t + 20, \text{ où } \gamma \text{ est une constante réelle.}$$

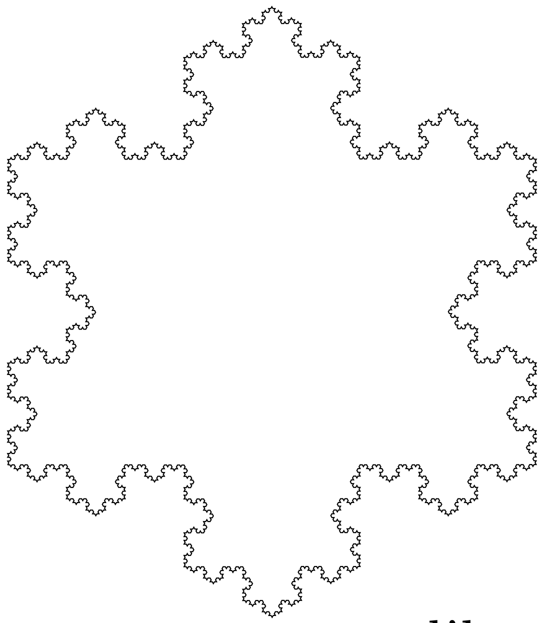
   Comme ci-dessus, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. Le coefficient de proportionnalité K est une constante à déterminer.

a. Montrer que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$q'(t) - Kq(t) = -K(\gamma t + 20).$$

b. Déterminer, en utilisant une intégration par parties, une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $f : x \longmapsto xe^{-Kx}$.

c. Etablir l'expression de $q(t)$ en fonction de t, K et γ.



Bonnes vacances d'hiver

Il fait trop chaud pour un flocon de neige, donc à défaut voici un flocon de Koch :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Flocon_de_Koch`