Correction du TD 0 de physique

Exercice : puissance et force *(extrait G2E 2008)*

- Calculons la vitesse du navire : $v = 15$ nœuds

soit $v = 15 \times 1$ mille$/h$ $= 15 \times 1 \times 1852\ m/h$

$$\boxed{v = 27\,780\ m/h = 7{,}717\ m/s}$$

- Par analyse dimensionnelle ; on peut exprimer la puissance : $\mathcal{P}$.

$$[\mathcal{P}] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{[F]\times[\ell]}{[t]} = [F]\times[v]$$

D'où $\mathcal{P} = F \times v = k v^2 \times v = k v^3$

en supposant que toute la puissance du moteur serve à compenser la force de résistance de l'eau.

- On peut en déduire la constante k :

$$k = \frac{\mathcal{P}}{v^3} = \frac{5{,}0.10^6}{(7{,}717)^3} = 1{,}1.10^4\ W.s^3 m^{-3}$$

- or $1W = 1\ kg\ m^2 s^{-3}$ D'où $\boxed{k = 1{,}1.10^4\ kg\ m^{-1}}$

PROBLEME 1 : LE PENDULE SIMPLE DE GALILEE

a) g en m.s^{-2} $\Rightarrow [g] = [\ell][t]^{-2}$

b) $T = k.L^\alpha.g^\beta \rightarrow$ équation aux dimension :

$$[t] = [\ell]^\alpha [\ell]^\beta [t]^{-2\beta}$$

D'où $[t] = [\ell]^{\alpha+\beta}.[t]^{-2\beta}$

par identification : $\begin{cases} 1 = -2\beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$

Donc la relation s'écrit : $\boxed{T = k L^{1/2}.g^{-1/2} = k\sqrt{\frac{L}{g}}}$

c) • si l'on double la longueur du fil : $L \rightarrow 2L$

alors, $T' = k\sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{2}\, k\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{2}.T$

la période sera donc multipliée par $\sqrt{2}$.

• Si l'on multiplie la longueur du fil par n : $L \rightarrow nL$

alors, $T'' = k\sqrt{\frac{nL}{g}} = \sqrt{n}\, k\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{n}.T$

la période sera donc multipliée par $\sqrt{n}$.

PROBLEME 2 : UN SECRET NUCLEAIRE MAL GARDE

1) On peut utiliser l'expression de l'énergie cinétique par exemple :

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 \qquad \text{d'où } [E] = [m].[v]^2 \text{ en kg.}m^2.s^{-2}$$

2) Taylor a supposé que le rayon du nuage s'écrit en fonction des paramètres cités ci-dessus sous la forme : $R(t) = E^a\, t^b\, \rho^c$ où a, b et c sont trois constantes.

Equation aux dimensions :

$$[\ell] = \left([m]\,[\ell]^2\,[t]^{-2}\right)^a \cdot [t]^b \cdot \left([m].[\ell]^{-3}\right)^c$$

$$\iff [\ell]^1 = [m]^{a+c}\,[\ell]^{2a-3c}\,[t]^{b-2a}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = a + c \\ 1 = 2a - 3c \\ 0 = -2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ 1 = 5a \\ 2a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 2/5 \\ c = -1/5 \end{cases}$$

ce qui conduit finalement à

$$\boxed{R(t) = \frac{E^{1/5}\, t^{2/5}}{\rho^{1/5}}}$$

3) il suffit d'élever à la puissance 5 la relation précédente et de l'inverser pour obtenir

$$\boxed{E = \frac{R(t)^5\, \rho}{t^2}}$$

4) La photographie est prise à $t = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ s après l'explosion et on mesure grâce à l'échelle un rayon $R = 130$ m.

$$E \simeq \frac{(1{,}3 \cdot 10^2)^5 \times 1}{(2{,}5 \cdot 10^{-2})^2} \simeq \frac{4 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{-4}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E \simeq 1 \cdot 10^{14}\,\text{J}}$$

5 L'énergie libérée par Trinity équivaut à $20 \cdot 10^6$ kg de TNT, soit $\boxed{E \simeq 8 \cdot 10^{13}\,\text{J}}$.

Compte tenu que la constante numérique a été prise égale à 1 arbitrairement, **le résultat est excellent !**

Exercice 1 : homogénéité d'une relation

1) a) $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ est homogène à R donc la relation est non homogène

b) R_1E_1 et $R_1(R_1+R_2)E_2$ ne sont pas homogènes
$\Rightarrow$ on ne peut les additionner $\Rightarrow$ relation non homogène.

c) R_3E n'est pas homogène à une tension $\Rightarrow$ relation non homogène

d) $\frac{E_i}{R_i}$ en $V.\Omega^{-1}$ et $\frac{1}{R_i}$ en Ω^{-1}

Donc $\dfrac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$ en $\dfrac{V.\Omega^{-1}}{\Omega^{-1}}$ soit en V, unité de U

Donc la relation est homogène.

2) $RT = \frac{P.V}{n}$ en $Pa.m^3.mol^{-1}$ soit $kg.m^2.s^{-2}.mol^{-1}$

c en $m.s^{-1}$, M en $kg.mol^{-1}$ et ρ en $kg.m^{-3}$

Ainsi, $\frac{kRT}{M}$ en $\dfrac{kg\,m^2s^{-2}mol^{-1}}{kg.mol^{-1}}$ en m^2s^{-2} soit $(m.s^{-1})^2$

ce qui n'est pas homogène à une vitesse mais une vitesse au carré.

Donc $\boxed{c = k\sqrt{\frac{RT}{M}} \text{ est homogène}}$ car $k\sqrt{\frac{RT}{M}}$ en $m.s^{-1}$

$k\sqrt{\frac{RT}{\rho}}$ en $\left(\dfrac{kg\,m^2s^{-2}mol^{-1}}{kg\,m^{-3}}\right)^{1/2}$ en $m^{5/2}s^{-1}mol^{-1/2}$ non homogène à une vitesse.