Aujourd'hui : (jeudi)

* point de cours prévu demain (vend.)

* demain : td en classe entière.
(systèmes + retour formule du binôme)

La semaine prochaine
(encore des systèmes linéaires)

Systèmes linéaires : échelonnement et rang

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

n équations

p inconnues

Forme matricielle $\boxed{A \cdot \vec{X} = \vec{B}}$

où

p colonnes (inc)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1p} \\ a_{n1} & a_{np} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to L_1 \\ \to L_n \end{matrix}$$

n lig équat

a_{11} : $\uparrow x_1$; a_{1p} : $\uparrow x_p$

matrice des coeff.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

vecteur inconnu

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

membre de droite

Pivot d'une ligne
= première inconnue de l'équation
= premier coef $\neq 0$ de la ligne

Ligne sans pivot
= équation sans inconnue
= condition de compatibilité (= CC)

Condition d'échelonnement ($\simeq$ résolu)

Chaque pivot est de + en + à droite
(de - en - d'inconnues par ligne)

les CC à la fin

Objectif de la résolution :

aboutir à un système échelonné
pour conclure.

le réduire puis inc I = f(inc II)
puis forme vectorielle $\vec{x}$ =

Exemples

4 colonnes → 4 inconnues

$A \in \mathcal{M}_{3,4}$

$$A = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \overbrace{}^{x\ y\ z\ t} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \} \text{ 3 lignes}$$

→ système échelonné ✓✓

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_4 \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Système : $A\vec{X} = \vec{B}$

pivots

pivot = x → $x + 2z = a$

↓ plus de x

pivot = y → $y + z = b$

↓ plus de y

$0 = c$ C.C.

Pivot d'une ligne
= première inconnue de l'équation
= premier coef $\neq 0$ de la ligne

Ligne sans pivot
= équation sans inconnue
= condition de compatibilité (= CC)

Condition d'échelonnement ($\simeq$ résolu)

Chaque pivot est de + en + à droite
(de - en - d'inconnues par ligne)

les CC à la fin

Objectif de la résolution :

aboutir à un système echelonné
pour conclure.

Syst. echelonné (matrice) VII)

Le nombre de 0 initiaux à gauche de chaque
ligne est strictement $\nearrow$ quand on descend

inc $\vec{X} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \in V_S$

nb de 0 — x y z s t

$$A = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \boxed{1} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \quad \vec{B}$$

st ↗

3 pivots

→ échelonné ok

le pivot de chaque ligne (1er coef ≠ 0) de + en + à droite.

Pas échelonné

nb de 0 — x y z s t

$$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & & \end{bmatrix}$$

x apparaît l_3 mais pas dans l_1

y = pivot de L_1 est précédé par x dans L_3

nb de 0 — x y z

$$A = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ \cdot & \boxed{1} & 1 \\ \cdot & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

pas sh. ↗

y = pivot de L_2 à nouveau dans L_3

Rq : pas échelonné ⇝ pas encore échelonné

travail pas fini.

Terminer la résolution d'un syst. échelonné

Système : $A\vec{X} = \vec{B}$

pivots

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2z = a \\ y + z = b \\ 0 = c \end{cases}$$

pivot = x → plus de x
pivot = y → plus de y

C.C.

sssi $c = 0$

2 équations à pivot
1 sans $\Leftrightarrow$ (1 CC)

2 inconnues à pivot : x, y → inc. principales (I)
1 sans : z → inc secondaire (II) (paramètres)

Reste à :

* exprimer les inc I en fonction des inc II (param)
* ajouter 1 eq tautologique chaque inc II

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x & + 2z = a \\ y & + z = b \end{cases}$$

$(\mathcal{H})$ homogène

$\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sol fonda

Rang $r = 2$

$p = 3$

$p - r = 3 - 2 = 1$ inc $\Rightarrow \infty$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2z \\ y = b - z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2z \\ b - z \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"solution fondamentale de $\mathcal{H}$"

sol particulière

sol gle des Système homogène associé

Ex 2

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ 4 inconnues

Système : $A\vec{X} = \vec{B}$ (x, y, z, t) — pivots

pivot = x → $x + 2z = a$

↓ plus de x

pivot = y → $y + z = b$

↓ plus de y

$0 = c$ → C.C. supposé ok

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2z \\ y = b - z \\ z = z \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sol part — 2 sol fondam des (H)

Rang $r = 2$

$p = 4$

$p - r = 4 - 2 = 2$ inc H

Ex 3 :

$$A = \begin{matrix} \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} x & y & z & s & t \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

st ↗ $\quad \vec{B}$

3 pivots x z t

Mais z (I) apparaît encore dans x

→ échelonné ok ✓

$$(S) \begin{cases} x + y + z + 2s + t = a \\ z + s = b \\ t = c \end{cases}$$

réduire

$\Leftrightarrow$

réduction

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{X} = (\quad)_{y,s}$

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + 2s + t = a \\ z + s \quad\quad = b \\ t = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \quad \begin{cases} x + y + s = a - b - c \\ z + s = b \\ t = c \end{cases}$$

échelonné + réduit ✓✓

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a - b - c - y - s \\ y = y \\ z = b - s \\ s = s \\ t = c \end{cases}$$

Rang $r = 3$, $p = 5$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b-c \\ 0 \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sol part ; sol gén de (H) ; 2 sol fondam de (H) ; $p - r = 5 - 3 = 2$ inc II

1 se débarrasser de z dans x
2 inc ppp en fonct des II
3 $\vec{X} = (\quad) + y(\quad) + s(\quad)$

Point théorique : le rang r

Déf : le rang r du système est le nombre de pivots une fois le système échelonné

Rappel : (S) : n équations, p inconnues

$r = rg(S)$ = nb pivots = nb inc I (à pivot)

$r \leq p$

En particulier $r \leq p$

(nb inc I $\leq$ nb inc)

$p - r$ = nb d'inc sans pivot = nb d'inc II (paramètres)

Cas où $r = p$ $\Leftrightarrow$ pas d'inc II (pas de param)

$\Leftrightarrow$ si (S) compatible, alors solution unique

1 pivot par ligne $\rightsquigarrow$ $r \leq n$

r : nb de lignes à pivot — n : nb de lignes (équations)

$r \leq n$

ligne avec pivot = équation efficace

ligne sans pivot = condition de compatibilité

$n - r =$ nb de C.C.

Cas d'égalité → Compatibilité automatique

$r = n \iff$ pas de CC

$\iff$ le système est compatible $\forall \vec{B}$ pour tout membre de droite

Conjonction des 2 propriétés $r = n = p$

Si $r = n$ → compatibilité automatique

et $r = p$ → pas de paramètre inutile

alors $n = p$ "bon nombre" !

autant d'équations que d'inconnues

système carré

matrice carrée

Alors $\forall \vec{B}$, $\exists ! \vec{X}$ (unique) tq $A\vec{X} = \vec{B}$

Noté : $\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{B}$

Système de Cramer

matrice A inversible

Rang

Ex : $n = 3$ équations $p = 3$ inc $r = 3$

système échelonné

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \rightsquigarrow n = r = p = 3$$

Système de Cramer

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ b - c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

nb de x dans y dans z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a \\ \rightarrow b \\ \rightarrow c \end{matrix}$$

dans

inversable

d'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & . \\ . & 1 & -1 \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{dans } x \\ \rightarrow \text{dans } y \\ \rightarrow \text{dans } z \end{matrix}$$

nb de a de b de c

Ex 2°

système déjà échelonné

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases}$$

$n = 3$
$p = 3$
$r = 3$

Cramer : $r = n = p$

$x = a - y = a - (b - c) = a - b + c$

Réduction $\Leftrightarrow$

$L_1' \leftarrow L_1 - L_2$
$L_2' \leftarrow L_2 - L_3$

$$\begin{cases} x = a - b + c \\ y = b - c \\ z = c \end{cases}$$

pour chaque $\vec{B}$ tout, solution unique $\Leftrightarrow$

nb de x y z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{dans } x \\ \rightarrow b \\ \rightarrow c \end{matrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ b - c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{B}$$

Matrice inverse de A inversible

nb de a b c

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{dans } x \\ \rightarrow y \\ \rightarrow z \end{matrix}$$

Ce que nous avons vu aujourd'hui

* résoudre un système, c'est l'échelonner

inc I = f(inc II)
CC

* Notion de rang = nb de pivots = r

* Majorations du rang

$r \leq p$ (nb d'inconnues) $\rightsquigarrow$ $p - r$ inc II

$r \leq n$ (nb d'équations) $\rightsquigarrow$ $n - r$ CC

* Système de Cramer

$r = n = p$

* compatibilité auto (pas de CC) ← existence
* unicité sol (pas de inc II) ← unicité

$\rightarrow \forall \vec{B}, \exists ! \vec{X}$ tq $A\vec{X} = B$ (unicité ↙, existence ↖)

inversibilité de A : $\Leftrightarrow \vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{B}$

Solution pas unique

= pas assez d'équations

$n = 2$ équations
$p = 3$ inconnues

ex :
$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

$n < p$
pas assez d'équations

$p - n = 3 - 2 = 1$ inc II

$n = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} I \\ I \\ II \end{matrix} \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 3 + z \\ z = z \end{cases}$$

II

$$\Leftrightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II

une solution pour chaque valeur de z → inc II

⇝ une infinité de solutions.