

Sommes arithmétiques et géométriques

Proposition 1 (Sommes de progressions arithmétiques)

► Formule simple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ aussi.

car : $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

► Somme partielle

Pour $m \leq n$ entiers, par Chasles : $\sum_{k=m}^n k = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$.
 $= m + (m+1) + \dots + (n-1) + n$

► Cas de la somme d'une constante

Pour $b \in \mathbb{R}$ une **constante**, on a :

$$\triangleright \sum_{k=1}^n b = b \cdot n \quad \triangleright \sum_{k=0}^n b = b \cdot (n+1) \quad \triangleright \sum_{k=m}^n b = b \cdot (n-m+1)$$

pour $0 \leq m \leq n$ entiers.

► Formule générale

Pour une suite arithmétique (u_n) , on a : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = an + b$.

Pour $m \leq n$, sa somme est : $\sum_{k=m}^n u_k = \overbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}^{\text{moyenne}} \cdot \overbrace{(n-m+1)}^{\text{nb de termes}}$
 $= \frac{1}{2} \cdot [a(m+n) + 2b] \cdot (n-m+1).$

Exercice 1 (Application des formules)

1. Calculer, pour $n \geq 1$, les sommes :

$$\triangleright A = \sum_{k=0}^n (2k+1) \quad \triangleright B = \sum_{k=n+1}^{2n} k \quad \triangleright C = \sum_{k=0}^n (n-2k)$$

2. a) Écrire une formule pour : $\forall q \neq 1, m \leq n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \sum_{k=m}^n a \cdot q^k$.

b) Pour $n \geq 1$, calculer :

$$\triangleright A = \sum_{j=1}^{n+1} 3^j \quad \triangleright B = \sum_{k=2}^n \frac{2^{k+1}}{4^k} \quad \triangleright C = \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{2k} \cdot 2^{-k} \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{R})$$

$$\triangleright D = \sum_{k=0}^{3n} n \cdot 5^{2k} \quad \triangleright E = \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2} \quad \triangleright F = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k}$$

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{n-k}$.

(formule de factorisation)

Corrigé Ex 1 (Application des formules)

1. Calculer, pour $n \geq 1$, les sommes :

$$\triangleright A = \sum_{k=0}^n (2k+1) \quad \triangleright B = \sum_{k=n+1}^{2n} k \quad \triangleright C = \sum_{k=0}^n (n-2k)$$

► **Calcul de A**

► *En décomposant par linéarité :*

$$\begin{aligned} \text{On décompose : } A &= \sum_{k=0}^n (2k+1) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

► *Par la formule générale :*

$$\begin{aligned} \text{On obtient aussi : } A &= \sum_{k=0}^n (2k+1) = \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \frac{u_0+u_n}{2} \cdot (n+1) \\ &= \frac{1+(2n+1)}{2} \cdot (n+1) \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

► **Calcul de B**

► *Par Chasles :*

$$\begin{aligned} \text{On écrit : } B &= \sum_{k=n+1}^{2n} k \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot (2n+1) - (n+1)] \\ &= \frac{n}{2} \cdot [3n+1] = \frac{n(3n+1)}{2} \end{aligned}$$

► *Par la formule générale :*

$$\begin{aligned} \text{On obtient aussi : } B &= \sum_{k=n+1}^{2n} k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \\ &= \frac{u_{n+1}+u_{2n}}{2} \cdot [2n - (n+1) + 1] \\ &= \frac{(n+1)+2n}{2} \cdot [n] = \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

2. a) Écrire une formule pour : $\forall q \neq 1, m \leq n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \sum_{k=m}^n a \cdot q^k$.

Proposition 2 (Somme d'une somme géométrique)

Pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

La raison de la progression géométrique sommée est $q \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \sum_{k=m}^n a \cdot q^k &= a \cdot \sum_{k=m}^n q^k \\
&= a \cdot \left[\sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^{m-1} q^k \right] \\
&= a \cdot \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} \right] \\
&= a \cdot \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Remarque

Pour $m \leq n$, dans la formule : $\sum_{k=m}^n q^k = q^m + q^{m+1} + \dots + q^{n-1} + q^n$

$$= \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

on a : $\triangleright q^m$ est le **premier terme** $\triangleright q^{n+1}$ est le **terme suivant le dernier**

b) Pour $n \geq 1$, calculer :

$$\begin{aligned}
\triangleright A &= \sum_{j=1}^{n+1} 3^j & \triangleright B &= \sum_{k=2}^n \frac{2^{k+1}}{4^k} & \triangleright C &= \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{2k} \cdot 2^{-k} \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{R}) \\
\triangleright D &= \sum_{k=0}^{3n} n \cdot 5^{2k} & \triangleright E &= \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2} & \triangleright F &= \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k}
\end{aligned}$$

Pour chacune de ces sommes,

- $\triangleright$ on commence par identifier la raison de la suite géométrique que l'on somme,
- $\triangleright$ et on met en facteur de la somme les constantes qui ne dépendent pas de k

$\triangleright$ **Calcul de** $A = \sum_{j=1}^{n+1} 3^j$

La raison est $q = 3$. On trouve donc : $A = \frac{3-3^{n+2}}{1-3} = \frac{3}{2} \cdot [3^{n+1} - 1]$.

$\triangleright$ **Calcul de** $B = \sum_{k=2}^n \frac{2^{k+1}}{4^k}$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on a : } \frac{2^{k+1}}{4^k} &= 2 \cdot \frac{2^k}{4^k} = 2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^k = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

La raison est donc $q = \frac{1}{2}$.

On met la constante 2 en facteur, puis on applique la formule (premier terme : q^2 , terme suivant le dernier : q^{n+1}) :

$$\begin{aligned}
B &= 2 \cdot \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 4 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

$\triangleright$ **Calcul de** $C = \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{2k} \cdot 2^{-k}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on a : } a^k \cdot b^{2k} \cdot 2^{-k} = a^k \cdot (b^2)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{ab^2}{2}\right)^k.$$

La raison est donc $q = \frac{ab^2}{2}$. La formule ne s'applique que pour $q \neq 1$: on distingue donc deux cas.

• Si $ab^2 \neq 2$:

On a $q \neq 1$, donc :

$$C = \sum_{k=0}^n \left(\frac{ab^2}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{ab^2}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{ab^2}{2}}$$

$$= \frac{2^{n+1} - (ab^2)^{n+1}}{2^n \cdot (2 - ab^2)}.$$

(On a multiplié le numérateur et le dénominateur par 2^{n+1} .)

• Si $ab^2 = 2$:

On a $q = 1$: on somme la constante 1, donc :

$$C = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

► **Calcul de D** $= \sum_{k=0}^{3n} n \cdot 5^{2k}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a : $5^{2k} = (5^2)^k = 25^k$. La raison est donc $q = 25$.

Le facteur n ne dépend pas de k : on le met en facteur. Le terme suivant le dernier est

25^{3n+1} , donc :

$$D = n \cdot \sum_{k=0}^{3n} 25^k$$

$$= n \cdot \frac{1 - 25^{3n+1}}{1 - 25}$$

$$= \frac{n}{24} \cdot [25^{3n+1} - 1].$$

► **Calcul de E** $= \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a : $2^{k/2} = (2^{1/2})^k = (\sqrt{2})^k$. La raison est donc $q = \sqrt{2} \neq 1$.

Le terme suivant le dernier est $(\sqrt{2})^{2n} = 2^n$, donc :

$$E = \sum_{k=0}^{2n-1} (\sqrt{2})^k$$

$$= \frac{1 - (\sqrt{2})^{2n}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= (\sqrt{2} + 1) \cdot (2^n - 1).$$

(Quantité conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$.)

► **Calcul de F** $= \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k}$

Pour $0 \leq k \leq n$, on a : $2^k \cdot 3^{n-k} = 3^n \cdot \frac{2^k}{3^k} = 3^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

La raison est donc $q = \frac{2}{3}$, et 3^n est une constante qui ne dépend pas de k . Ainsi :

$$F = 3^n \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= 3^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 3^{n+1} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

On retrouve la formule de la question suivante pour $a = 2$ et $b = 3$: $3^{n+1} - 2^{n+1} = (3 - 2) \cdot F$.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, \quad b^{n+1} - a^{n+1} = (b - a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{n-k}.$

(formule de factorisation)

On verra cette formule en classe présentielle.