

Propositions

Set/ou

× / factorielle

avec formule binôme

× ((Relation de Chasles + récurrence pour sommes))

Factorielle (produit)

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

$$= \prod_{k=1}^n k$$

$\Pi = \text{Pi (produit)}$

$\Sigma = \text{Sigma (somme)}$

Relations de récurrence entre factorielles

Init: $0! = 1 \dots$

Hérédité

$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

$$n! = (n-1)! \times n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$) Passage suivant
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Tableau de valeurs

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

$\times 1 \quad \times 2 \quad \times 3 \quad \times 4 \quad \times 5 \quad \times 6 \quad \times 7 \quad \times 8$

$\frac{6}{2} = 24$

ex:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$= 120$$

Rq: notation

$n!$ parce que la suite grandit très vite.

ex:

$$8! = 40320 \rightarrow \times 9$$

$$9! = 362880 \rightarrow \times 10$$

$$10! = 3,6 \text{ millions}$$

Exemples de simplifications (Chords)

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n} = (n+1)(n+2)$$

$$\rightarrow \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n} = (n+1)$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)} = n$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n-1) n (n+1) \quad \checkmark \checkmark$$

⚠ $\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Factorielles et coef. binom.

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$0 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Hors du domaine

$$k > n$$

$$\binom{n}{k} = 0$$

Petits k

$$\underline{k=0}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n-0)!} = 1$$

$$\underline{k=1}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! (n-1)!} = n$$

$$\underline{k=2}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Rep. dans
 $\binom{n}{k}$: fraction
k facteurs

au numérateur
et au dénominateur

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 24$$

$$\binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = 120$$

ex:

$$\frac{\binom{n}{5}}{\binom{n}{4}} = \frac{n-4}{5}$$

Généralisation

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-(k+1))!} = \frac{n-k}{k+1}$$

calculer $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}}$, $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}$ etc

↪ $(n-k-1)!$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

voisins d'étage n

↪ étage du dessous voisin de droite

Ex

$$\binom{6}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{(1 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{5 \times 6}{1 \times 2} = 15$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{6!}{4!2!}$$

$$\binom{12}{10} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{(1 \times 2 \times \dots \times 10) \times (1 \times 2)} = \frac{11 \times 12}{1 \times 2} = \frac{132}{2} = 66$$

Rq: Symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ex: $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2}$

Relation de Chabbes et récurrence de ^{hérédité} sommes

Prop (Passage au suivant)

Soit (a_n) suite de

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ → n termes

Alors on a: $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$ → n+1 termes

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ → terme en plus.

Ex:

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$S_{n+2} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2}$

$S_{n+1} - S_{n-2} = a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$

$S_{n-1} - S_n = -a_n$

tableau de valeurs recommandé ⚠

Application récurrence

n	0	1	2	3	4	5
S_n	0	1	3	6	10	15
B_n	0	1	3	6	10	15
$\frac{n(n+1)}{2}$						

Initialisation

$n=0$

$n=1$

$n=2$

$S_n = \sum_{k=1}^n k = 0+1+2+3+\dots+n$ → a_k
(H_n)
 $= \frac{n(n+1)}{2} = B_n$

$S_n = S_0 = \sum_{k=1}^0 k = 0$ ↪ (H₀) ok

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0$

$S_n = S_1 = \sum_{k=1}^1 k = 1$

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ ↪ (H₁) ok

tableau de valeurs

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons

$$(H_n)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Montrons

$$(H_{n+1})$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ?$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Calculons} \\ \text{(Charles)} \end{array} \right. S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \text{ (Rappel)} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right] = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$= (n+1) \frac{n+2}{2} \text{ (} H_{n+1} \text{) ok}$$

CC par
rec

$\forall n \quad H_n$ ok

Variante

$$\sum_{k=1}^n a(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$