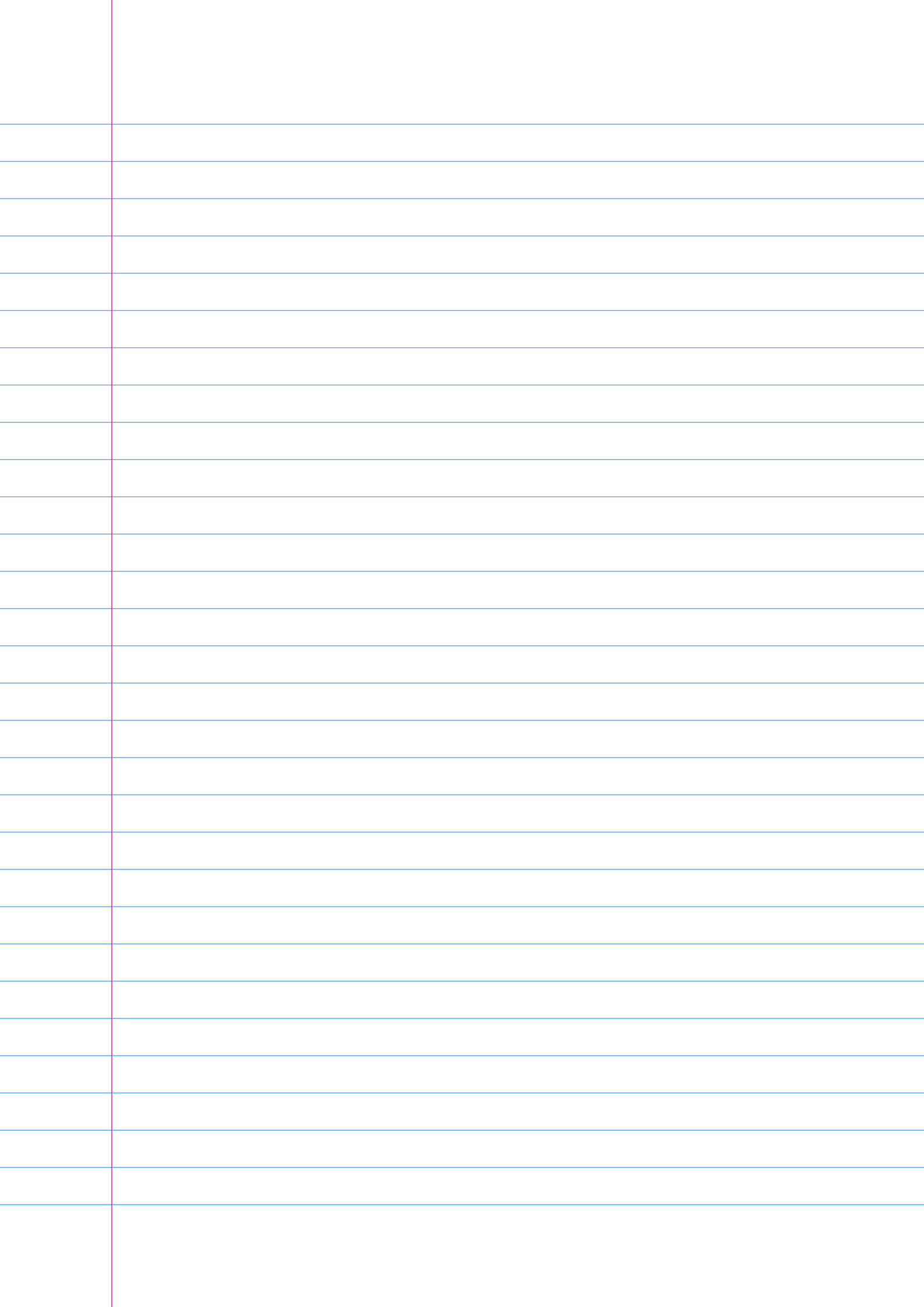




provisions ENT

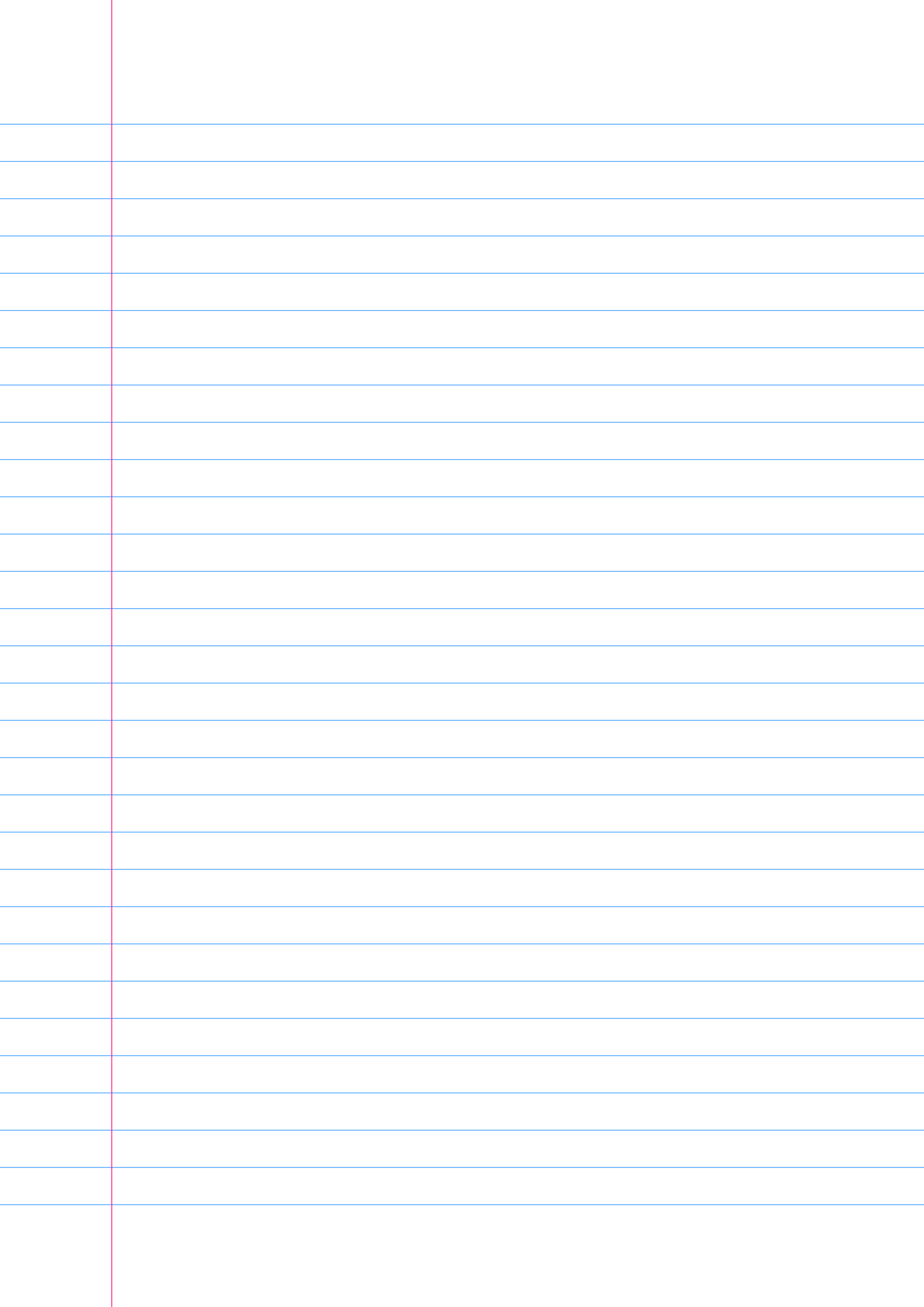
- * maintenant 10-12h classe entière ✓
- * 13h-15h } → Connection 1/2 classe
- 15h-16h }

gpe alternance X PC

- * Ma: 10-12h classe entière

- > jeudi? si distanciel: 10-12h

Colles après-midi.

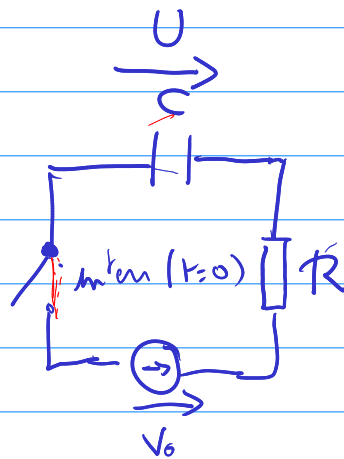


Equations différentielles d'ordre 1

cf PC:
$$\begin{cases} y' + a y = b. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
 équation différentielle
Condition initiale

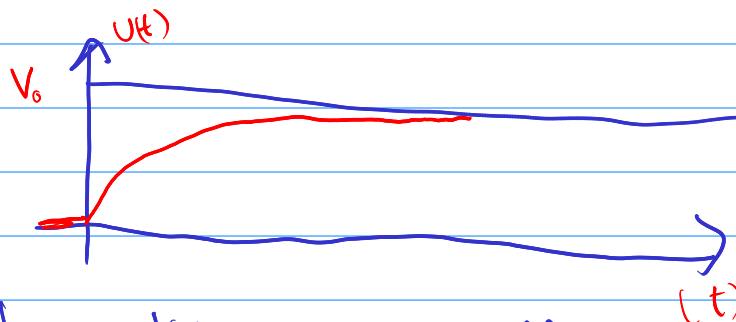
Problème de Cauchy

En PC exemple le plus simple en électricité



Charge d'un condensateur

tension U : $q = C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{charge}}}{U} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tension}}}{U}$ $i = \frac{dq}{dt}$



Comme
$$U(t) = \begin{cases} \text{exponentielle} \\ V_0 (1 - e^{-t/\tau}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Forme d'une E.D. lin

ordre 1

Coef csts

$$y' + a y = b$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Inconnue:

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

↳ intervalle: $\mathbb{R}$ (maths)

$$t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$$

$y(t)$

y définie dérivable

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

Objectif : trouver toutes les fonctions solutions
(plusieurs)

↳ unicité : par Cond. initiale

I. Introduction

$$y' + ay = b$$

Exemple basique

$$\underbrace{y' = y}_E \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$y' - y = 0$$

$$a = -1$$

$b = 0 \rightarrow$ eq homogène

$\rightarrow$ Trouvons une solution ?

exp est solution

0 aussi.

$y = k \exp$ est solution pour tout $k \in \mathbb{R}$

$$y' = k \exp \rightsquigarrow y' = y.$$

Fait : pas d'autre solution

Autres équations homogènes ($b=0$)

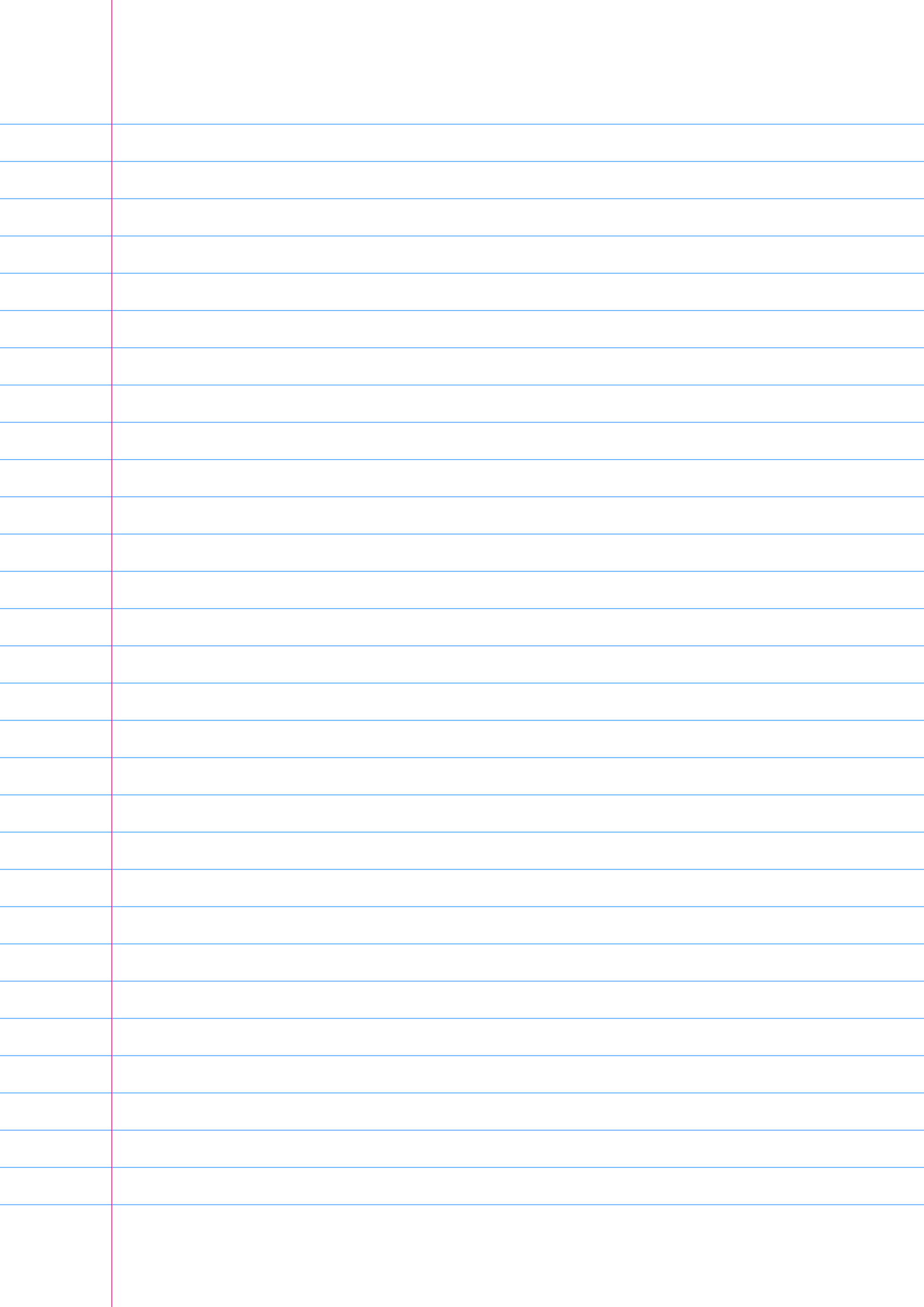
$$(H) \quad y' + ay = 0 \Leftrightarrow y' = -ay$$

Sol. : $\left[\begin{array}{l} y = e^{-at} \\ y' = -a e^{-at} \end{array} \right]$ solution fondamentale

Autres : modèle : $y = k y_0$ $k \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow ?$ (non pas d'autres)

$\hookrightarrow e^{-at}$ fonda



2° Calculs préliminaires

• Dérivation d'exponentielles

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dx} e^x = e^x \\ \frac{d}{dt} e^{u(t)} = u'(t) \cdot e^{u(t)} \\ \frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at} \end{array} \right|$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = u'(t) f'(u(t))$$

$$x \leftarrow u(t)$$

$$u = at \quad a \in \mathbb{R} \\ u' = a$$

Dérivée d'un produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

A

$$\frac{d}{dt} (y(t) \times e^{u(t)}) = y'(t) e^{u(t)} + y(t) u'(t) e^{u(t)} \\ = (y' + u' y) e^u$$

B

$$\frac{d}{dt} (y(t) e^{at}) = y'(t) e^{at} + y(t) a e^{at} \\ = (y' + ay) e^{at}$$

Dans l'éq. diff

$$y' + ay = b$$

Simplifions (formules de réécriture)

$$\frac{1}{e^u} = e^{-u}$$

$$y' + u' y = \frac{d}{dr}(y e^u) \times e^{-u} \quad \text{d'après (A)}$$

$$y' + a y = \frac{d}{dr}(y e^{ar}) \times e^{-ar} \quad \text{d'après (B)}$$

Année: (E) $y' + a y = b$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}(y e^{ar}) e^{-ar} = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}(y e^{ar}) = b e^{-ar} \quad \hookrightarrow$$

(Reste à primitiver : chapitres suivants)

3 Cas de l'équation homogène $b=0$

$$y' + a y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}(y e^{ar}) \times \underbrace{e^{-ar}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}(\underbrace{y e^{ar}}_{g(t)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr} g(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I \quad g'(t) = 0$$

réécriture

Prop(admise) (prop 2 des notes)

Sur un intervalle, une fonction
de dérivée (uniformément nulle)
est une cste

$$\text{Si } \forall t \in I \quad g'(t) = 0$$

$$\text{alors } \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I \quad g(t) = k$$

Quantificateurs

* universel : $\forall x \in \mathbb{R}$
pour tout x dans $\mathbb{R}$ (réel)

* existentiel $\exists k \in \mathbb{R}$
"il existe k réel tq"
(tel que)

Ici : $\exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I \quad g(x) = k$

avant

k ne dépend pas de x .
c'est le même k pour tous les x .

4° Fin de la résolution homogène ^G (sur I)

Soit à résoudre (H) $y' + a y = 0$

réécriture
 $\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \underbrace{\frac{d}{dt} (y e^{at})}_{=0} \underbrace{e^{-at}}_{\neq 0} = 0$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \frac{d}{dt} (y e^{at}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I$$

$$y e^{at} = h$$
$$\Leftrightarrow y = h \cdot e^{-at}$$

Fin

Cette constante h dite d'intégration

$\leadsto$ le trouver? par la condition initiale

Ex 1 (réécriture du mbde gauche)

- $h: x \mapsto y(x) e^{ax}$
- 1° Calculer $h'(x)$
 - 2° Vérifier la réécriture $y' + ay = \frac{d}{dx} (y e^{ax}) e^{-ax}$
 - 3° Exemples

$$y' + y = \frac{d}{dx} (y e^x) \times e^{-x}$$

$$y' + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y' - 5y = \underline{\hspace{2cm}}$$

4° Résoudre l'éq-diff homogène (sur $\mathbb{R}$)

$$(H_1) \quad y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (y e^x) \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} y e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I,$$

$$y(t) e^t = k$$

$$y(t) = k e^{-t}$$

Cet aprem - en 1/2 gre 14 / 15
→ corrections (formule du binôme)
→ factorielles (cf cours)
+ conf binom.