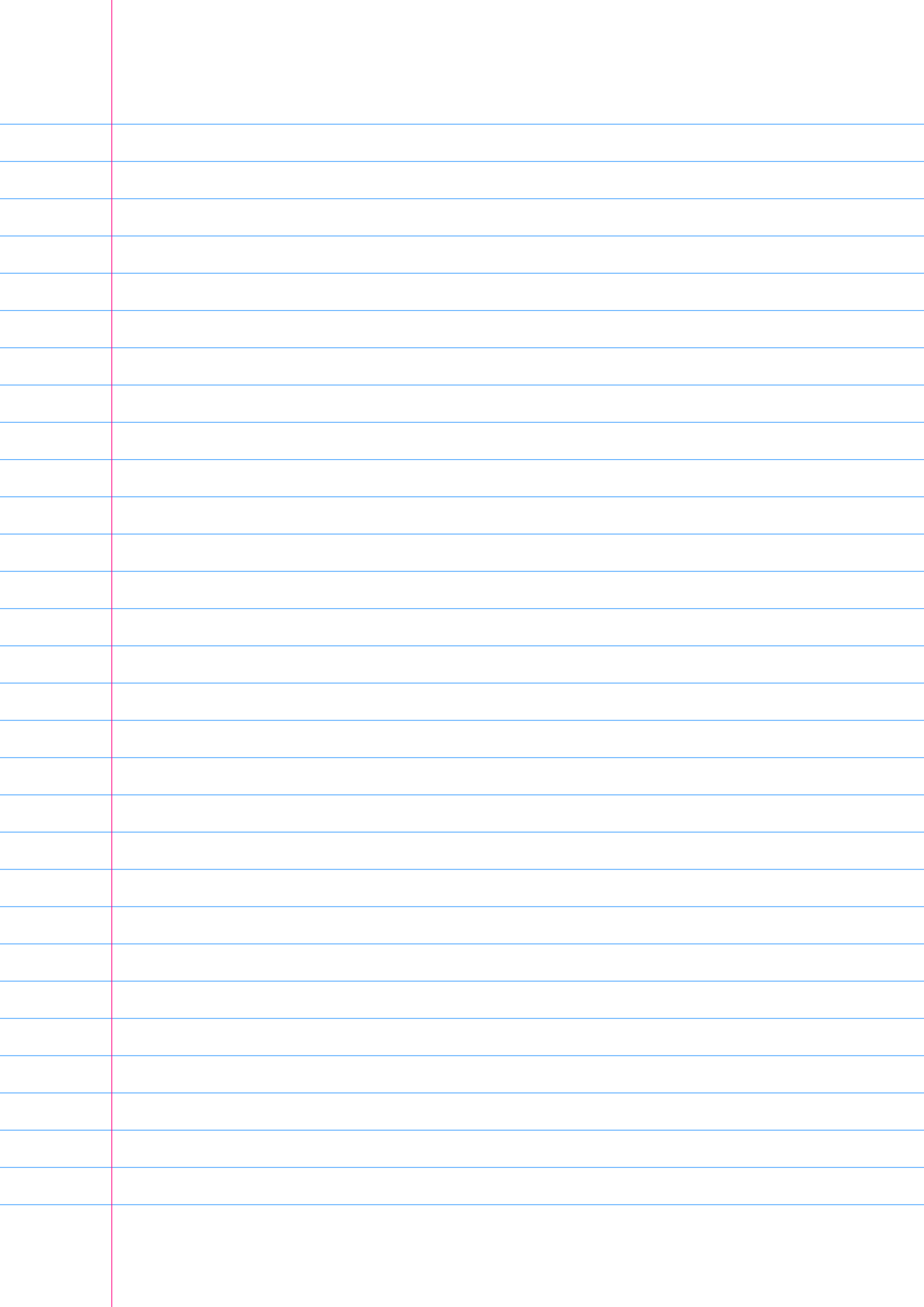




# Équations différentielles ordonnées

linéaires  
coefficient.

## Partie II

Rappels (hier)

Forme de l'équation

$$(E) \quad y' + a y = b$$

$b =$  membre de droite

$y: I \rightarrow \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$  ctes

Equation homogène associée à (E)

$$(H) \quad y' + a y = 0 \quad b=0$$

Récurrence

$$\frac{d}{dt} (y e^{at}) = y' e^{at} + a y e^{at} = (y' + a y) e^{at}$$

Solution fondamentale  
(de l'éq homogène)

$$(H) \Leftrightarrow y' + a y = 0$$

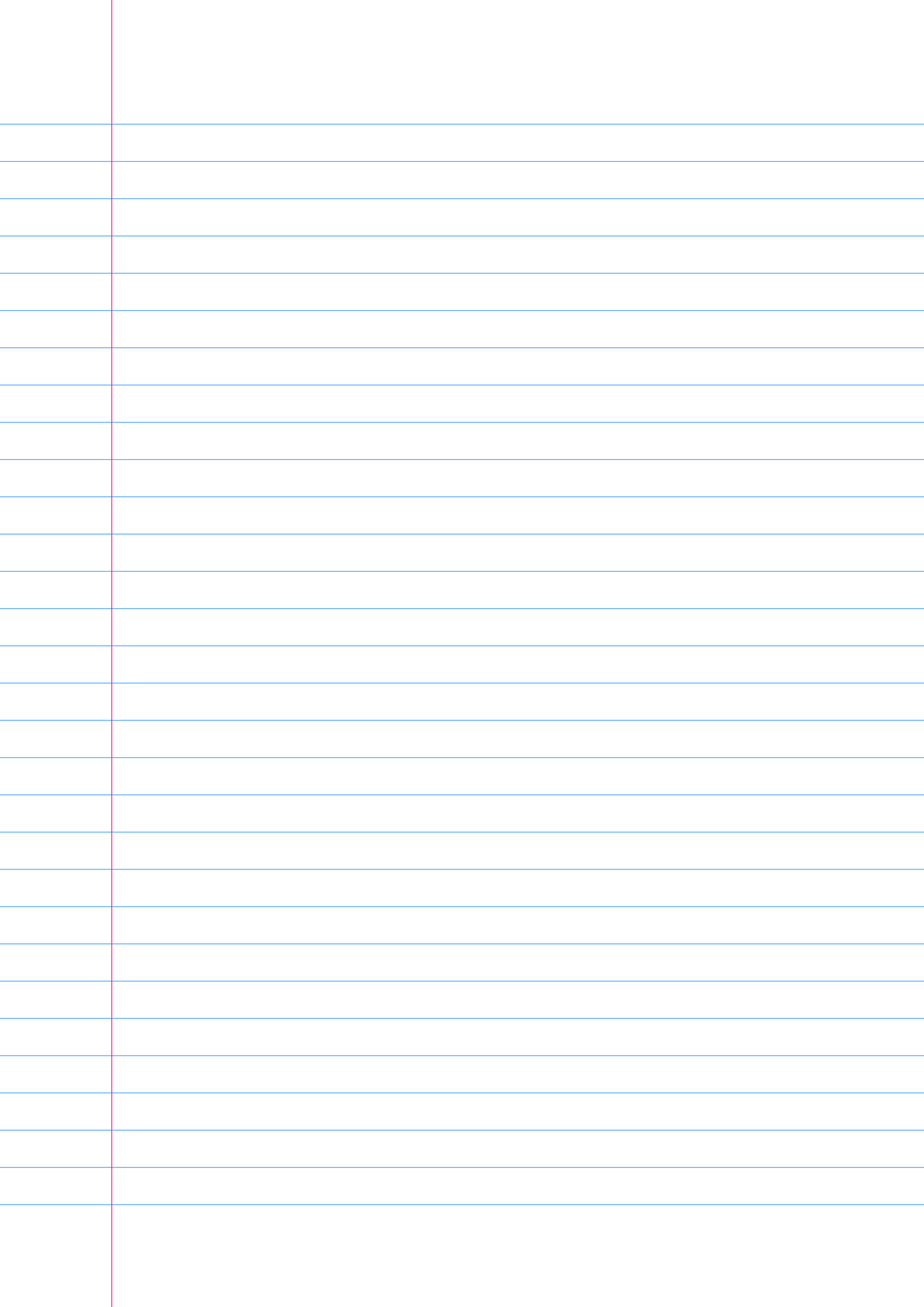
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^{at}) e^{-at} = 0$$

$\neq 0$  (exp. 000)

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \frac{d}{dt} (y e^{at}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in I, y(t) e^{at} = k$$

$$\Leftrightarrow y(t) = k e^{-at}$$



## Structure des solutions de $H$

$$y' + ay = 0 \iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall t \in I$$

$$y(t) = k \cdot e^{-at}$$

À une cste multiplicative près,  
la fonction  $t \mapsto e^{-at}$  ( $a=1$ )  
est l'unique solution de (P1).

Ex 1 :

## 1, 2° Réécriture

Notions  $h: t \mapsto y(r) \cdot e^{at}$   $y: I \rightarrow \mathbb{R}$

Calculus  $\forall t \in I, \quad h'(t) = \frac{d}{dt} (y(t) e^{at})$

$$\begin{cases} u = y \\ u' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} v = e^{at} \\ v' = a e^{at} \end{cases}$$

$$= y' e^{ar} + ya e^{ar}$$

$$= (y' + ay) e^{ar}$$

## Réécriture :

ATI

$$y' + ay = R(r) e^{-ar} \quad \leftarrow \times e^{-ar} = \frac{1}{e^{ar}}$$

$$= \frac{d}{dr} (y e^{ar}) \cdot e^{-ar}$$

### 3° Examples

$a=1$

$$y' + y = \frac{d}{dt} (y e^{at}) e^{-at} = \frac{d}{dt} (y e^t) \times \underbrace{e^{-t}}_{\neq 0}$$

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I,$$

$$y(t) e^t = k$$

$$\text{soit } y(t) = k e^{-t}$$

$$\times \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

↳ sol fond  
cette multiplication

Réécriture

$a=2$

$$y' + 2y = \frac{d}{dt} (y e^{2t}) e^{-2t}$$

+ résoudre  
l'équation  
homogène

$$\Rightarrow y' + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (y e^{2t}) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \forall t \in I,$$

$$y(t) e^{2t} = k$$

$$\text{soit } y(t) = k \times e^{-2t}$$

$$\times \frac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}$$

$a=-5$

$$y' - 5y =$$

$$y' - 5y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^{-5t}) \cdot \underbrace{e^{5t}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I,$$

$$y e^{-5t} = k$$

$$\text{soit } y(t) = k e^{5t}$$

L'équation différentielle affine

équation de départ

(E)  
(H)

$$y' + ay = b$$
$$y' + ay = 0$$

← éq. homogène associée  
(on fait  $b=0$ )

On sait résoudre (H) cf plus haut  
( $ke^{-at}$ )

Recherche d'une solution particulière à (E)

ex: (E)  $y' + 2y = 6$

Méthode: on cherche une solution particulière cste

ici  $y=3$  est ok

$y' + 2y = 6$   $\Rightarrow y = \text{cste} = y_p$  (particulier)  
 $y' = 0$   
 $2y_p = 6$   
 $y_p = 3$  ✓

Cas général

$y' + ay = b$   $\Rightarrow y = y_p = \text{cste}$   
 $y' = 0$   
 $ay_p = b$   
 $\forall t \in I$   $y_p = \frac{b}{a} = \text{sol part. constante.}$

Rq: si  $a \neq 0$ .

le cas  $a=0$  n'a guère d'intérêt

$$y' = b \Rightarrow y(t) = bt + k$$

Pt d'étape

\* on sait résoudre (H)

\* on a 1 sol part de (E)

$$y_H' + ay_H = 0 \Rightarrow y_H = ke^{-at}$$
$$y_p = \frac{b}{a}$$

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall t \in I$$

Fin de la Résolution.

trouver toutes les solutions de (E)  $y' + ay = b$

On a

soit on dit  
magique

$$\begin{aligned} y' + ay &= b \\ y_p' + ay_p &= b \end{aligned}$$

(E)  $\leadsto$  on recherche  $y$   
 $\leadsto$  avec  $y_p = \frac{b}{a}$

$$y' - y_p' + a(y - y_p) = 0$$

$$(y - y_p)' + a(y - y_p) = 0$$

$\hookrightarrow$  en notant

$$y_H = y - y_p$$

(H)

$$y_H' + ay_H = 0$$

à l'équation homogène  
on sait la résoudre!

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I \quad y_H(t) = k \cdot e^{-at}$$

Conclusion: Structure des solutions:

$y$  solution de (E)  $y' + ay = b$   $a \neq 0$

$\Leftrightarrow$

solution  
générale de (E)

$$y = y_p + y_H$$

$$\text{où } y_p = \frac{b}{a} = \text{cte}$$

$$y_H(t) = k e^{-at}$$

solution générale de  
l'équation homogène associée

Rq: il y a plusieurs solutions: une pour chaque  $k \in \mathbb{R}$

Ensemble-solution de E

$$\mathcal{I}_E = \left\{ y: t \mapsto \frac{b}{a} + k e^{-at}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

$\searrow \quad \swarrow$   
 $y_p \quad y_H$

$k \in \mathbb{R}$   
une cste

# Unicité de la solution :

Condition initiale (problème de Cauchy)

$$(P): \begin{cases} y' + ay = b & (E) \quad a, b \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$$

$y: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $I \subset \mathbb{R} \quad \quad \quad I \subset \mathbb{R}$

Proposition

[ Il existe toujours une unique solution à ce problème de Cauchy.

Pas à mémoriser :

$$y(t) = \frac{b}{a} + \left( y_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(t-t_0)}$$

## Étapes de la résolution

- 1 résolution de l'eq. homogène  $(H) \rightsquigarrow y_H = k e^{-at}$
- 2 écriture de la sol part  $y_p$
- 3 Struct des sol<sup>ns</sup> de (E)  $y = y_p + y_H$
- 4 Application de la (CI)  $\rightsquigarrow$  trouver k

[5° Tracer la courbe]

↳ tangente  
↳ asymptote

## Exercice 2

Résoudre le pb de Cauchy  $I = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$

①

$$(P) \begin{cases} y' + y = 1 & (E) \\ y(0) = 0 & (CI) \end{cases}$$

$$1^\circ (H) \quad y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^t) \underbrace{e^{-t}}_{\neq 0} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I \quad y(t) e^t = k$$

$$\text{soit } \underbrace{y(t) = k e^{-t}}_{y_H}$$

2° Sol part

$$\cancel{y' + y = 1} \quad (E)$$

$$y' = 0$$

$$\wedge y = \text{cte}$$

$$y = y_P = 1$$

$$y = y_P = \text{cte?}$$

3° Structure sol g<sup>ale</sup> de (E)

$$y \text{ sol de (E)} \Leftrightarrow$$

$$y = y_P + y_H$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I$$

$$y(t) = 1 + k e^{-t}$$

4° CI

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = y(0) = 1 + k$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Cc:

$$y \text{ sol de (P)} \Leftrightarrow$$

$$\forall t \in I,$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

# Représentation graphique (de la sol<sup>n</sup>)

$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = 1 - e^{-t}$

asymptote horiz

Tracé de 2 droites :

a asymptote  $\pm \infty$   
tangente à la CI

$t \rightarrow +\infty$   
 $t \rightarrow -\infty$   
( $t=0$ )

$y \rightarrow 1$   
 $t \rightarrow +\infty$   
( $y \rightarrow -\infty$   
 $t \rightarrow -\infty$ )

$\hookrightarrow$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ici :

$$a = 0$$

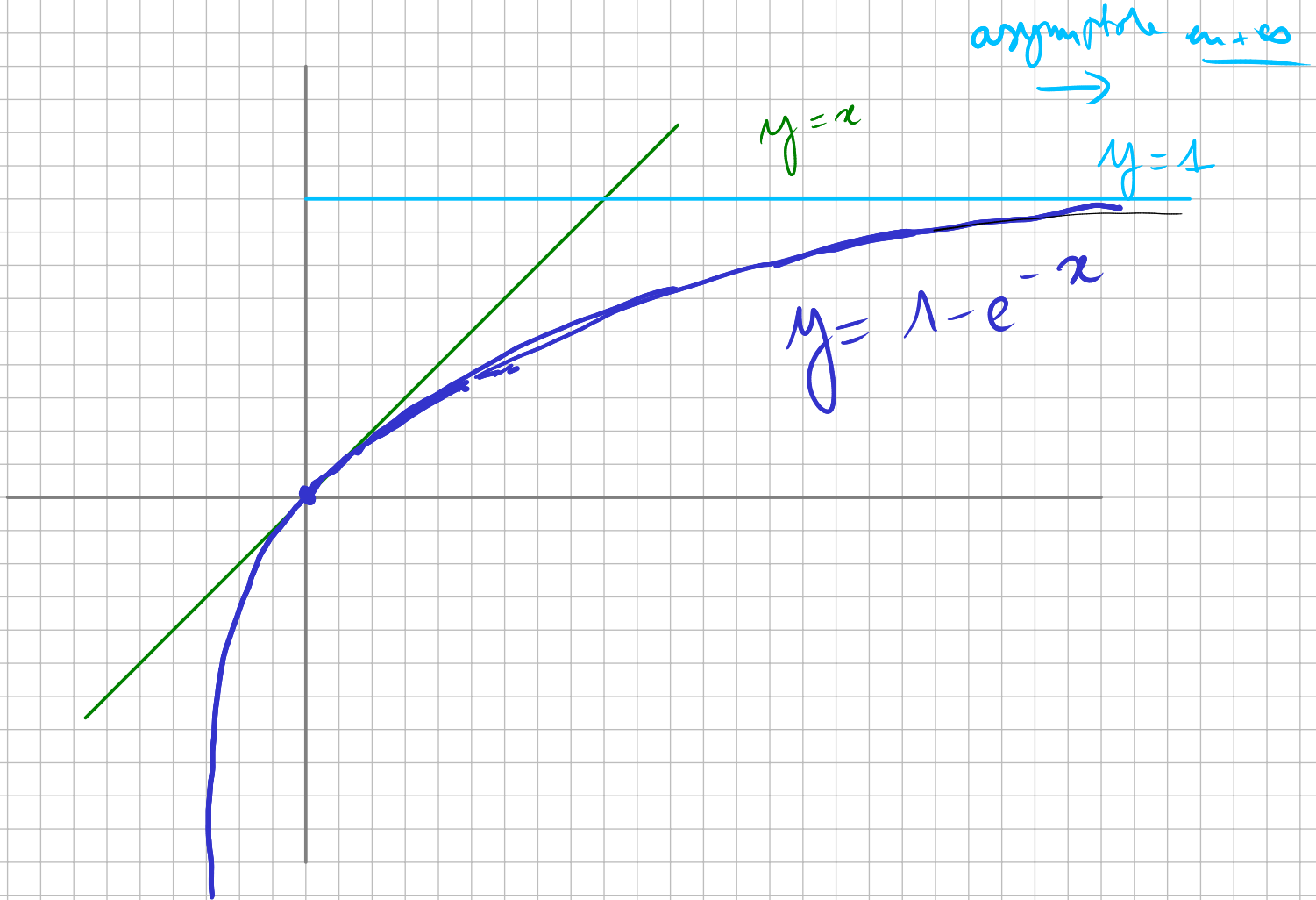
$$y(a) = y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

}

$$y = x$$

eq. tangente  
en 0



## Exercice 2

(2)

Résoudre le pb de Cauchy  $I = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$

$$(P) \begin{cases} y' + 3y = -1 & (E) \\ y(1) = 1 & (CI) \end{cases}$$

$$1^\circ (H) \quad y' + 3y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^{3t}) \underset{\neq 0}{e^{-3t}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (y e^{3t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I \quad y(t) e^{3t} = k$$

$$\text{soit } y(t) = k e^{-3t}$$

$y_H$

2° Sol part

$$\boxed{y' + 3y = -1} \quad (E)$$

$3y = -1$

$$y' = 0 \quad \wedge \quad y = \text{cte}$$

$$y = y_P = -\frac{1}{3}$$

$$y = y_P = \text{cte?}$$

3° Structure sol g<sup>ale</sup> de (E)

$$y \text{ sol de (E)} \Leftrightarrow y = y_P + y_H$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in I$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} + k e^{-3t}$$

4° CI

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = y(1) = -\frac{1}{3} + k e^{-3} \Leftrightarrow k e^{-3} = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{4}{3} e^3$$

Cc:

$$y \text{ sol de (P)} \Leftrightarrow \forall t \in I,$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} e^{-3t} e^3$$

$$= \frac{1}{3} [4 e^{-3(t-1)} - 1]$$

# Représentation graphique (de la sol<sup>n</sup>)

$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = \frac{1}{3}(4e^{-3(t-1)} - 1)$  asymptote horiz

Tracé de 2 droites :

a asymptote  $\pm \infty$   
tangente à la CI

$t \rightarrow +\infty$   
 $t \rightarrow -\infty$   
( $t=0$ )

$y \rightarrow -\frac{1}{3}$   
( $y \rightarrow +\infty$ )

$\hookrightarrow$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ici :

$$a = 1$$

$$y(a) = 1$$

$$y'(1) = -4$$

}

$y = -4(x-1) + 1$   
eq. tangente  
en  $x=1$

Pour jeudi 15/10

apprendre le cours.

→ terminer en 2. ←

probablement visio 10h → 12h  
maths

coller l'après-m. (cyrus de 3)

Séance de questions?

Voir avec M. Chouleur

jeudi?

td?

chance extér?

??

