

Ds 2

Exercice 1 (Cours, ≈ 5 points)

- Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de : $\triangleright \sum_{k=0}^n 1$, $\triangleright \sum_{k=0}^n k$, $\triangleright \sum_{k=0}^n q^k$, $q \neq 1$.
Calculer : $\triangleright A = \sum_{k=0}^n (2k+1)$ $\triangleright B = \sum_{k=n+1}^{2n} k$.
- Soit (a_n) une suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.
 - Que donne S_0 ? Et S_3 ?
 - Pour $n \geq 1$, simplifier : $S_{n+2} - S_{n-1}$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
- Pour $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}$, rappeler les formules pour :
 $\triangleright X = a^n \cdot a$ $\triangleright Y = a^m \cdot a^n$ $\triangleright Z = \frac{a^m}{a^2}$, pour $a \neq 0$.
 Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\triangleright u = 2 \times 2n$, $\triangleright v = 2 \times 2^n$.
 Le nombre $P = 4^5$ est-il une puissance de 2? Si oui, laquelle?
 Le nombre $Q = 6^5$ est-il un multiple de 2^4 ? Simplifier $R = \frac{Q}{2^4}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire, avec le signe $\sum$ les formules du binôme :
 $\triangleright (1+x)^n$, où $x \in \mathbb{R}$, $\triangleright (a+b)^n$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Pour $0 \leq k \leq n$ entiers, donner la formule entre : $\triangleright \binom{n}{k}$ $\triangleright \binom{n}{k+1}$ $\triangleright \binom{n+1}{k+1}$.
Écrire le triangle de Pascal jusqu'à « $n = 6$. »
- Écrire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression développée pour :
 $\triangleright a(x) = (1+x)^4$ $\triangleright b(x) = (1-x)^4$ $\triangleright c(x) = (2+x)^4$
 $\triangleright d(x) = (1+x)^5$ $\triangleright e(x) = (x-1)^5$
 Simplifier : $\triangleright u(x) = \frac{1}{2} \cdot [(1+x)^5 + (1-x)^5]$ $\triangleright v(x) = \frac{1}{2} \cdot [(x+1)^5 + (x-1)^5]$.

Exercice 2 (Télescopage, ≈ 4 points)

- Soit (a_k) une suite.
Pour $m \leq n$, simplifier : $\triangleright A = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1})$ $\triangleright B = \sum_{k=m+1}^n (a_k - a_{k-1})$.
- Soit $q \neq 1$, et $0 \leq m \leq n$.
 - Calculer télescopiquement la somme : $\sum_{k=m}^n (q^k - q^{k+1})$.
Factoriser la somme par $(1-q)$.
 - En déduire l'expression connue pour : $\sum_{k=m}^n q^k$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit : $a_n = \frac{1}{2n-1}$.
 - Pour $k \geq 1$, simplifier : $a_k - a_{k+1}$.
 - En déduire pour $n \geq 1$, l'expression de : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$.
 - Quel est son signe? Ses variations? Que donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?
- On souhaite retrouver la formule pour la somme des premiers carrés.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons : $a_n = \frac{1}{6} \cdot (n+1)n(n-1)$.
 - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\triangleright x_k = a_k - a_{k-1}$, $\triangleright y_k = a_{k+1} - a_k$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduire l'expression de :
 $\triangleright A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2}$, $\triangleright B_n = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2}$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier : $\sum_{k=1}^n k^2 = A_n + B_n$. Conclure.

Exercice 3 (Équations différentielles, ≈ 2,5 points)

- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, calculer, pour $t \in \mathbb{R}$: $\frac{d}{dt}(y(t) \cdot e^{at})$.
Dédire une réécriture de l'expression $y' + a \cdot y$.
Dédire la résolution de l'éqⁿ diff^{le} homogène : $(H) : y' + a \cdot y = 0$.
- Résoudre les deux problèmes de Cauchy :

$\triangleright \mathcal{P}_1 : \begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$	$\triangleright \mathcal{P}_2 : \begin{cases} 2 \cdot y' + y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
---	---

 Représenter graphiquement les 2 solutions, avec :
 - $\triangleright$ tangente en $x = 0$ $\triangleright$ asymptote en $x \rightarrow \pm\infty$
- On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équⁿ différentielle : $y' + y = 3x^2 \cdot e^{-x}$.
 - Montrer que y est solution ssi : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(y(x) \cdot e^x) = 3x^2$.
 - Dédire : si $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R} : y(x) \cdot e^x = x^3 + k$, alors y est solⁿ.
 - Y a-t-il d'autres solutions? Conclure sur la forme des solutions.

Exercice 4 (Équation différentielle d'ordre 2 guidée, ≈ 2,5 points)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit le problème : $\mathcal{P}_3 : \begin{cases} y'' + 7 \cdot y' + 12 \cdot y = 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \end{cases} \leftarrow (\mathcal{H})$

- Pour $r \in \mathbb{R}$, soit $g : x \mapsto e^{rx}$. Calculer $\forall x \in \mathbb{R} : (g'' + 7g' + 12g)(x)$.
Trouver les 2 valeurs de r telles que g soit solution de $(\mathcal{H})$.

Soient les 2 fonctions (intermédiaires) : $\triangleright u = y' + 3 \cdot y \quad \triangleright v = y' + 4 \cdot y$.

- Montrer que si y est solution de $\mathcal{P}_3$, alors : $\begin{cases} u' + 4u = 0 \\ u(0) = \beta + 3 \cdot \alpha \end{cases}$

Dédire qu'alors pour $x \in \mathbb{R} : u(x) = (\beta + 3 \cdot \alpha) \cdot e^{-4x}$.

- Déterminer de même l'expression, pour $x \in \mathbb{R}$, de $v(x) = ?$
- Écrire y avec u et v . (on pourra tenter la « soustraction magique » $v - u$.)
Dédire l'expression de y si elle est solution de $\mathcal{P}_3$.
Vérifier que celle-ci est effectivement l'unique solution de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 5 (Formules par récurrence, ≈ 4 points)

- Soit la suite définie par : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - Faire le tableau de valeurs de la suite pour $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$.
 - Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 3^n - 1$.
- Soit la suite définie par : $(u_n)_{n \geq 1} : \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_{n+1}}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$
 - Faire le tableau de valeurs de la suite pour $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$.
 - Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$.
 - Montrer, $\forall n \geq 1$, l'écriture : $u_n = \frac{1}{1 - 2^{-n}}$. Que dire de : $\lim(u_n)$?
- On va montrer par récurrence pour $n \geq 1$, que :

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right), \quad \text{où : } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}.$$
 - Pour $n \geq 1$, écrire $(\mathcal{H}_n)$ et $(\mathcal{H}_{n+1})$.
Quels termes sont en commun dans le membre de droite?
(On n'a donc **pas intérêt à toucher à ces termes** en commun dans le calcul!)
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
 - Faire la démonstration.
 - Dédire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.