

Colles S04 : sommes, produits, Pascal, binôme

1 Sommes et produits

- **Forme étendue** $\sum_{k=m}^n a_k = \overbrace{a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n}^{n-m+1 \text{ termes}}$ (avec $m \leq n$). Variante pour $\prod$.
- Notation somme : $\sum_{k=m}^n a_k$
- Règles usuelles, not^{amnt}, pour $\lambda \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=m}^n \lambda \cdot a_k$, $\prod_{k=m}^n (\lambda \cdot a_k)$ (bien se méfier des $\prod \dots$)
- **Relation de Chasles**
- Pour $m \leq p \leq n$: $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$. (on « fait une pause » à $k = p$.)
- Exemples « soustractifs » comme : $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$.
- **Règles de « passage au suivant »**
- Pour $n \in \mathbb{N}$, « par relation de Chasles » : $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}$, $\prod_{i=0}^{n+1} r_i = \left(\prod_{i=0}^n r_i \right) \cdot r_{n+1}$.
- (Application : formes fermées obtenues par récurrence. Exemple : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.)
- **Sommes de référence** (avec $n \in \mathbb{N}$)
- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (pour tout $q \neq 1$)
- **Factorielle**
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$. Ainsi : $\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n-1)! \times n, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$
- **Pratique du télescope** La formule : $\sum_{k=m}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_m$.
- Mise en œuvre avec des « ... » et l'« effet domino ». (Variantes $\sum_{k=p+1}^n (x_{k-1} - x_k)$, $\sum_{k=m}^n (x_{k+2} - x_k)$, etc.)
- Aussi pour des produits. (parfois, manipuler des factorielles, est plus commode que de télescoper.)

2 Triangle de Pascal et formule du binôme

- | $k \rightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\forall x \in \mathbb{R}$, |
|------------------|---|---|----|----|----|---|---|------------------------------|
| $n \downarrow 0$ | 1 | | | | | | | $(1+x)^0 = 1$ |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | $(1+x)^1 = 1+x$ |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | $(1+x)^4 = 1+\dots$ |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | $(1+x)^5 =$ |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | $(1+x)^6 =$ |
- **Expression** Pour $n \geq 0, k$ entiers.
- $$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{pour } k \in [0; n] \\ 0 & \text{pour } k < 0 \text{ ou } k > n. \end{cases}$$
- **Pour « petit » k**
- $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$ $\binom{n}{4} = \text{etc.}$
- Par les règles de simplification : $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\frac{n!}{(n-1)!} = n$, $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$, etc.
- **Propriétés**
- **formule de symétrie** : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, (pour $0 \leq k \leq n$.)
- **Formule de Pascal** : Pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- Triangle de Pascal « ligne par ligne » par la formule de Pascal.
- **Manipulation des puissances** (règles de calcul usuelles)
- **Formules du binôme** pour $n \in \mathbb{N}$,
- pour $x \in \mathbb{R}$: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$.
- pour $a, b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.
- Si, avec $a \neq b$, on oublie les coefs binomiaux : $\sum_{k=0}^n a^{n-k} \cdot b^k = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$. (rien à voir, donc **attention!**)

Questions de cours

Deux questions de cours parmi les suivantes :

1. Écrire la relation de Chasles pour les sommes. Donner un exemple de version « soustractive ».
2. Donner la formule, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, pour : $\sum_{k=1}^n \lambda \cdot a_k$, $\prod_{k=1}^n (\lambda \cdot a_k)$.
3. Rappeler les 4 **étapes** de la démonstration par **récurrence**.
Quelles sont les premières phrases de l'**hérédité**?
4. Quelle relation entre u^n et u^{n+1} ? Écrire les formules pour : u^{m+n} , $(u^m)^n$, $\frac{u^m}{u^n}$.
5. Écrire la formule de Pascal entre $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k+1}$. Écrire le triangle de Pascal jusqu'à « $n = 6$ ».
6. La formule « factorielle » de $\binom{n}{k}$. Écrire la formule du binôme pour $(1+x)^n$ et $(a+b)^n$.
7. Simplifier : $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}$. Pour quels n s'annulent-elles? (interpréter sur le triangle de Pascal?)
8. La somme des termes d'une progression géométrique de raison $\neq 1$.

Une somme par récurrence

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Que donne A_0 ? Écrire la relation entre A_n et A_{n+1} .
2. Montrer par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$: (ou $n \geq 2$ ou $n \geq 1$)
 $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Exercices préparés

Un exercice parmi les suivants :

► Cours

1. Pour $q \in \mathbb{R}$, calculer télescopiquement : $\sum_{k=0}^n (1-q) \cdot q^k$. ($1+u^b - 1 = : \mathbf{H} \blacktriangleleft$)
2. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. $0 = \mathcal{O}$

► Sommes de progressions arithmétiques

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\sum_{k=0}^n (2k+1)$, $\sum_{k=n+1}^{2n} k$, $\sum_{k=0}^n (n-2k)$. ($\frac{z}{(1+u^b)u} = \mathcal{I} \sum_u^{\mathcal{I}=\mathcal{I}} - \mathcal{I} \sum_u^{\mathcal{I}=\mathcal{I}} = \mathcal{G}$)

► Formules télescopiques

1. Soient $0 \leq m \leq n$ et une suite (a_k) . Télescoper : $\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k)$ $\sum_{k=m+1}^n (a_{k-1} - a_k)$.
2. Pour $k \geq 2$, vérifier : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Dédurre, pour $n \geq 2$: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.
(Cohérence du signe & des variations?) (Variantes : $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{n}$.)

► Cours : phénomène pair-impair

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, écrire la formule du binôme pour $(1+x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que donne $(-1)^n$?
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, compléter : $(1+x)^4 = \dots$ $(x+1)^4 = \dots$ $(1+x)^5 = \dots$ $(x+1)^5 = \dots$
 $(1-x)^4 = \dots$ $(x-1)^4 = \dots$ $(1-x)^5 = \dots$ $(x-1)^5 = \dots$
 Simplifier : $\sum_{k=0}^n A = \frac{1}{2} \cdot [(1+x)^n + (1-x)^n]$ $\sum_{k=0}^n B = \frac{1}{2} \cdot [(1+x)^n - (1-x)^n]$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

► Exemples de binômes

1. Donner le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$. Pour $a, x \in \mathbb{R}$, écrire : $(1+x)^5$ et $(1+a)^4$.
2. Développer : $\sum_{k=0}^4 A = (2+a)^4$, $\sum_{k=0}^4 B = (\sqrt{3}+1)^4$, $\sum_{k=0}^4 C = (\sqrt{2}-1)^5$.
3. (Bonus) Justifier : $C > 0$ et C « petit ». Dédurre $\sqrt{2} > \frac{41}{29}$. Calculer $C' = (\sqrt{2}+1)^5$, et $C \times C'$.
bonne approx?

Exercices nouveaux

Sur les thèmes :

- **démonstration par récurrence.**
- Manipulation de sommes, et de produits. Pratique « à la main » du télescopage.
- Passage au terme suivant dans une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.
- Manipulation du triangle de Pascal. Applications de la formule du binôme.