

Colles 5 : Équations différentielles 1 - coefficients constants

1 Prérequis de dérivation

Exponentielles

Pour $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on a : $(e^u)' = u' \cdot e^u$. En particulier, pour $a \in \mathbb{R}$: $\frac{d}{dt}(e^{a \cdot t}) = a \cdot e^{a \cdot t}$.

Représentation graphique de fonctions « exponentielles »

Pour la forme $y : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y_\infty + k \cdot e^{a \cdot x} \end{cases}$ tracé de :

- ▶ tangente en $x = 0$, avec $y'(0) = k \cdot a$
- ▶ l'asymptote pour $x \rightarrow \pm\infty$
- ▶ l'allure de la courbe.

Méthode de réécriture

Pour $a \in \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable : $\frac{d}{dx}(y \cdot e^{a \cdot x}) = (y' + a \cdot y) \cdot e^{a \cdot x} \rightsquigarrow \boxed{y' + a \cdot y = e^{-a \cdot x} \cdot \frac{d}{dx}(y \cdot e^{a \cdot x})}$.

Quantificateur existentiel $\exists$, constantes

« $\exists k \in \mathbb{R}$ tq ... » se lit : « il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que ... ». k défini avant x : k indépendant de x

Pour $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, on a donc : $[u \text{ est constante sur } I] \iff [\exists k \in \mathbb{R}, \text{ tq } \forall x \in I, u(x) = k]$

Dérivation et constantes

Une fonction constante a sa dérivée nulle : $[h \equiv \text{cst}] \implies [h' \equiv 0]$.

Réciproquement, sur I un intervalle (pas de « trous »!) : $[h' \equiv 0] \implies [\exists k \in \mathbb{R}, \text{ tq } \forall x \in I, h(x) = k]$.

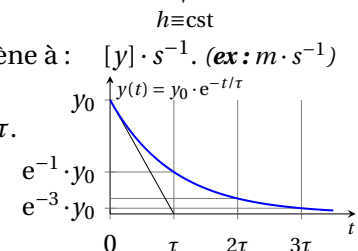
« Temps caractéristique » en secondes

En $\varphi - \chi$, grandeur « à unité » $y = y(t)$ (**ex** : mètres). Alors $y' = \frac{dy}{dt}$ homogène à : $[y] \cdot s^{-1}$. (**ex** : $m \cdot s^{-1}$)

La somme : $\tau \cdot y' + y$ a un sens si τ est un temps.

Pour $y(t) = y_0 \cdot e^{-t/\tau}$, intersection tangente ($t = 0$) et $y = 0$ (asymptote) à $t = \tau$.

(et $y(\tau) = \frac{y_0}{e} \approx 37\% \cdot y_0$, $y(3\tau) = \frac{y_0}{e^3} \approx 5\% \cdot y_0$.)



2 Équation d'ordre 1 $(E) : y' + a \cdot y = b$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Équation homogène associée

$\rightsquigarrow$ (on fait $b = 0$) l'équation $(H) : y' + a \cdot y = 0$.

Solution générale de (H) $= e^{-ax} \cdot \frac{d}{dx}(y \cdot e^{ax})$

On résout ainsi : $(H) : y' + a \cdot y = 0 \iff [\frac{d}{dx}(y \cdot e^{ax}) \equiv 0] \iff [\exists k \in \mathbb{R}, \text{ tq } \forall t \in I, y \cdot e^{ax} = k] \rightsquigarrow y_H(x)$

Principe de superposition

Si : $\begin{cases} y_1' + a \cdot y_1 = b_1 \\ y_2' + a \cdot y_2 = b_2 \end{cases}$ alors : $y_\Sigma = y_1 + y_2$ vérifie : $y_\Sigma' + a \cdot y_\Sigma = b_1 + b_2$.
(S'adapte aussi pour un signe $-$, et aussi avec des coefficients constants.)

Solution particulière constante à (E)

Pour $a \neq 0$, on trouve $y_p \equiv \text{cst}$ solution de (E) par : $[y_p' + a \cdot y_p = b] \iff [y_p = \frac{b}{a}]$.

Structure affine des solutions à (E)

La « solution générale » à (E) s'écrit : $y = y_p + y_H$

soit : $y : t \mapsto \frac{b}{a} + k \cdot e^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Problème de Cauchy

Adjonction à (E) d'une « condition initiale » $(P) : \begin{cases} y' + a \cdot y = b & (E) \\ y(t_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$

On résout ainsi pour un unique $k \rightsquigarrow$ solution unique à (P) .

Solution particulière à $y' + ay = b(x)$ (exemples guidés) $\alpha, \beta = ?$

(« Recherche sous forme inspirée de $b(x)$ ») $\bullet b(x) = x \rightsquigarrow y_p(x) = \alpha x + \beta$ $\bullet b(x) = e^x \rightsquigarrow y_p(x) = \alpha \cdot e^x$

Dérroulement de la colle

Questions de cours (notation sur $\simeq 4$)

2 questions de cours parmi les suivantes :

1. Écrire la forme du problème de Cauchy pour le degré 1.
Donner les étapes pour la résolution du problème de Cauchy.
2. Écrire les règles de dérivation pour : $\triangleright \frac{d}{dt} [\ln(u(t))]$ et $\triangleright \frac{d}{dt} [e^{u(t)}]$
avec les hypothèses sur u ! $\rightsquigarrow$ cas particulier pour $\frac{d}{dt} [e^{a \cdot t}]$, $a \in \mathbb{R}$.
3. Pour $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et $a \in \mathbb{R}$, calculer : $\frac{d}{dx} (y \cdot e^{ax})$.
Réécrire ainsi : $y' + a \cdot y = e^{-a \cdot x} \cdot \frac{d}{dx} (y \cdot e^{ax})$.
4. Que donne la dérivée d'une constante? Que dire si $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie : $\forall t \in I, h'(t) = 0$?
5. Trouver une solution particulière constante de l'équation (E) : $y' + a \cdot y = b$, pour $a \neq 0$.
Comment s'écrit l'équation homogène associée?
6. Résoudre l'équation homogène « écrite comme en physique » : $\tau \cdot y' + y = 0$.
Comment s'interprète le **temps caractéristique** τ ? (pourquoi dit-on que c'est un temps?)
7. Pour $r \in \mathbb{R}$, et $g : x \mapsto e^{rx}$, calculer $g'' - 5 \cdot g' + 6 \cdot g$. Pour quels r trouve-t-on 0?

Exercices préparés (notation sur $\simeq 6$)

Un exercice parmi les suivants :

► Un problème de Cauchy

Résoudre complètement le problème : $\mathcal{P} : \begin{cases} y' + \frac{1}{2} \cdot y = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ (Faire soigneusement la réécriture $y' + \frac{1}{2} \cdot y = \dots$)
Représenter graphiquement la solution. ($y_H = k \cdot e^{-x/2}$, $y_P = 2$, $y = 2 - 3 \cdot e^{-x/2}$.)

► Équation d'ordre 2

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de : $(H) : \underbrace{y'' - 5 \cdot y' + 6 \cdot y = 0}_{y''=?}$, et : $\triangleright u = y' - 2 \cdot y$,
 $\triangleright v = y' - 3 \cdot y$.

Trouver l'équation différentielle pour u & pour v . Exprimer y en fonction de u, v .

► Représentations graphiques

1. Représenter graphiquement $y = e^x$ et $y = e^{-x}$, en commençant par leurs tangentes en 0.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - e^{-x} \end{cases}$ Représenter graphiquement : $\triangleright$ la tangente en 0
 $\triangleright$ l'asymptote horizontale

De quel problème de Cauchy la fonction f est-elle solution? $\triangleright$ l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercices complémentaires

Portant notamment sur : $\triangleright$ Sommes et formule du binôme $\triangleright$ Allure de courbes $\triangleright$ dérivation, $\triangleright$ équations différentielles.