Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°7
Samedi 5 avril 2025 (4h00)

Exercice 1

1.
```
import numpy as np
L=[[1,2,4],[0,2],[0,1,3],[2,4],[0,3]]
M=np.array([[0,1,1,0,1],[1,0,1,0,0],[1,1,0,1,0],[0,0,1,0,1],[1,0,0,1,0]])
```

2.
```
def liste_a_matrice(L) :
    nb_sommets=len(L)
    matrice=np.zeros((nb_sommets,nb_sommets))
    for sommet in range(len(L)):
        for adjacent in L[sommet]:
            matrice[sommet,adjacent]=1
    return matrice

def matrice_a_liste(M) :
    L = [[] for k in range(np.shape(M)[0])]
    for i in range(np.shape(M)[0]) :
        for j in range(np.shape(M)[0]) :
            if M[i,j] == 1 :
                L[i].append(j)
    return L
```

Exercice 2 : Axe radical de deux cercles

1. Soit $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$P_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - r^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 7^2$$

d'où

$$\boxed{P_{\mathcal{C}}(M) = x^2 - 6x + y^2 - 4y - 36.}$$

Ainsi, $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM = r \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow P_{\mathcal{C}}(M) = 0$. Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est

$$\boxed{x^2 - 6x + y^2 - 4y - 36 = 0.}$$

2. Soit $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$P_{\Gamma}(M) = \Omega M^2 - \rho^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2 - 1^2$$

d'où

$$\boxed{P_{\Gamma}(M) = x^2 - 12x + y^2 + 2y + 36.}$$

Ainsi, $M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M = \rho \Leftrightarrow \Omega M^2 = \rho^2 \Leftrightarrow P_\Gamma(M) = 0$. Ainsi, une équation cartésienne de Γ est

$$\boxed{x^2 - 12x + y^2 + 2y + 36 = 0.}$$

3. Soit $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P_\mathcal{C}(M) = P_\Gamma(M) &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 4y - 36 = x^2 - 12x + y^2 + 2y + 36 \\ &\Leftrightarrow 6x - 6y - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x - y - 12 = 0.} \end{aligned}$$

On reconnaît une équation cartésienne d'une droite du plan donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ est une droite.}}$
Un vecteur directeur à $\mathcal{D}$ est $\vec{u} = (1, 1)$. Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{O\Omega} = (3, -3)$.
Ainsi, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{O\Omega} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) = 0$, ce qui prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ sont orthogonaux.
Puisqu'ils sont les vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et $(O\Omega)$, on en déduit que

$$\boxed{\text{les droites } \mathcal{D} \text{ et } (O\Omega) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

Déterminons une équation cartésienne de $(O\Omega)$. Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ sont orthogonaux, on en déduit que le vecteur $\vec{u} = (1, 1)$ est un vecteur normal à la droite $(O\Omega)$.
Il existe donc un réel c tel que $x + y + c = 0$ soit une équation cartésienne de la droite $(O\Omega)$. Puisque celle-ci contient le point $O(3, 2)$, on obtient $3 + 2 + c = 0$ d'où $c = -5$.
Une équation cartésienne de $(O\Omega)$ est donc $x + y - 5 = 0$.
Le point d'intersection (x, y) de $\mathcal{D}$ et $(O\Omega)$ vérifie donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - 12 &=& 0 \\ x + y - 5 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - y &=& 12 \\ x + y &=& 5 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x - y &=& 12 \\ 2y &=& -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{17}{2} \\ y &=& -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le point d'intersection de } \mathcal{D} \text{ et } (O\Omega) \text{ a pour coordonnées } (x, y) = \left(\frac{17}{2}, -\frac{7}{2}\right).}$$

4. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}' &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 7y - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 - 16 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation cartésienne de cercle. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{C}' \text{ est un cercle de centre } O'\left(4, \frac{7}{2}\right) \text{ et de rayon } r' = \frac{5\sqrt{5}}{2}.}$$

On sait que $M(x, y) \in \mathcal{C}'$ si et seulement si $P_{\mathcal{C}'}(M) = 0$ donc

$$\boxed{P_{\mathcal{C}'}(M) = x^2 + y^2 - 8x - 7y - 3.}$$

5. • On a

$$\begin{aligned}\boxed{M(x,y)\in\mathcal{D}'} &\Leftrightarrow P_{\mathcal{C}}(M)=P_{\mathcal{C}'}(M)\\ &\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y-36=x^2+y^2-8x-7y-3\\ &\Leftrightarrow \boxed{2x+3y-33=0.}\end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned}\boxed{M(x,y)\in\mathcal{D}''} &\Leftrightarrow P_{\Gamma}(M)=P_{\mathcal{C}'}(M)\\ &\Leftrightarrow x^2-12x+y^2+2y+36=x^2+y^2-8x-7y-3\\ &\Leftrightarrow \boxed{-4x+9y+39=0.}\end{aligned}$$

6. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}M(x,y)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'\cap\mathcal{D}'' &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 12\\ 2x+3y &=& 33\\ -4x+9y &=& -39\end{array}\right.\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3+4L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 12\\ 5y &=& 9\\ 5y &=& 9\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{69}{5}\\ y &=& \frac{9}{5}\\ y &=& \frac{9}{5}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Les droites $\mathcal{D},\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont concourantes en le point de coordonnées $\boxed{\left(\frac{69}{5},\frac{9}{5}\right).}$

Exercice 3 : Méthode de Simpson

1. Soit $f : x\mapsto x^4$, soit $a=0$ et $b=1$.
On a $\displaystyle\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$.
Par ailleurs,

$$I_{0,1}(f)=\frac{1}{6}\left(f(0)+f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(0+1+4\times\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{24}.$$

On constate que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\neq I_{0,1}(f)$ pour la fonction f considérée ici qui est un polynôme de degré 4 donc

$$\boxed{\text{la méthode de Simpson n'est pas d'ordre } 4.}$$

2. Soit $f : x\mapsto a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, où $(a_0,a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^4$. La fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= a_3\int_a^b x^3dx+a_2\int_a^b d^2dx+a_1\int_a^b xdx+a_0\int_a^b dx\\ &= a_3\left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b+a_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b+a_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b+a_0(b-a)\\ &= \frac{a_3}{4}(b^4-a^4)+\frac{a_2}{3}(b^3-a^3)+\frac{a_1}{2}(b^2-a^2)+a_0(b-a).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} I_{a,b}(f) & = & \dfrac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right) \\ & = & \dfrac{b-a}{6}\left(a_3(a^3+b^3+\dfrac{1}{2}(a+b)^3)+a_2(a^2+b^2+(a+b)^2)+a_1(a+b+2(a+b))+6a_0\right) \\ & = & \dfrac{b-a}{6}\left(\dfrac{3}{2}a_3(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+2a_2(a^2+ab+b^2)+3a_1(a+b)+6a_0\right) \\ & = & \dfrac{a_3}{4}(b^4-a^4)+\dfrac{a_2}{3}(b^3-a^3)+\dfrac{a_1}{2}(b^2-a^2)+a_0(b-a) \\ & = & \displaystyle\int_a^b f(x)dx. \end{array}$$

Ainsi, pour tout polynôme f de degré inférieur ou égal à 3, et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2, I_{a,b}(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, cette dernière égalité pouvant être fausse pour un polynôme de degré 4, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la méthode de Simpson est d'ordre}\,3.}$$

3. (a)
```
def simpson(f,a,b):
    return (b-a)/6*(f(a)+f(b)+4*f((a+b)/2))
```
   (b)
```
def simpson_composite(f,a,b,n):
    L=np.linspace(a,b,n+1)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=simpson(f,L[i],L[i+1])
    return S
```
   (c) Il faut choisir n très grand (par exemple, $n = 100000$).
4. La méthode des rectangles est d'ordre 0. Il vaut mieux choisir la méthode de Simpson, plus précise de façon générale.

Problème 1 : Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{array}{rcl} B_{n+1}-B_n & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2(n+1)}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^{2n+2}(x)-\cos^{2n}(x))dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)(\cos^2(x)-1)dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x^2\cos^{2n}(x)\sin^2(x)dx. \end{array}$$

Or, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}], -x^2\cos^{2n}(x)\sin^2(x) \leqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x^2\cos^{2n}(x)\sin^2(x) \leqslant 0$, i.e. $B_{n+1}-B_n \leqslant 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

2. (a) $A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ donc $\boxed{A_0 = \frac{\pi}{2}.}$

De même, $B_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{B_0 = \frac{\pi^3}{24}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $x \mapsto \cos^{2n}(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx > 0$, i.e.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A_n > 0.}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^2 \cos^{2n}(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, B_n > 0.}$$

(c) Soit $n \geqslant 1$.
On a $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{2n-1}(x)dx$.
On effectue une intégration par parties en posant $u'(x) = \cos(x), u(x) = \sin(x), v(x) = \cos^{2n-1}(x)$ et $v'(x) = -(2n-1)\sin(x)\cos^{2n-2}(x)$, ce qui est licite puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
D'après la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$A_n = \left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)dx.$$

Puisque $n \geqslant 1, 2n-1 \geqslant 1$ donc $\cos^{2n-1}(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par ailleurs, $\sin(0) = 0$ donc on obtient bien

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, A_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx.}$$

(d) D'après la question précédente, on a immédiatement pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx = \frac{A_n}{2n-1}}$$

(car $2n-1 > 0$).
Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A_n &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^{2n-2}(x)dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n-2}(x) - \cos^{2n}(x))dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \\ &= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_{2n} \end{aligned}$$

d'où $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$. Il en découle (puisque $2n > 0$ et $2n-1 > 0$) que

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \frac{A_n}{2n-1} = \frac{A_{n-1}}{2n}.}$$

(e) Soit $n \geqslant 1$.

On a $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx$ avec $u'(x) = 1, u(x) = x, v(x) = \cos^{2n}(x)$ et $v'(x) = -2n\sin(x)\cos^{2n-1}(x)$.

Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient grâce à la formule d'intégration par parties que

$$A_n = \left[x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)dx$$

car $\cos^{2n}(\frac{\pi}{2}) = 0$ puisque $2n > 0$.

On réalise une nouvelle intégration par parties en posant $u'(x) = 2x, u(x) = x^2, v(x) = \sin(x)\cos^{2n-1}(x)$ et $v'(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)$. Il en découle que

$$\begin{aligned} A_n &= n\left(\left[x^2\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x))dx\right) \\ &= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)dx + n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1-\cos^2(x))\cos^{2n-2}(x)dx \\ &= -nB_n + n(2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2(n-1)}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)dx\right) \\ &= -nB_n + n(2n-1)B_{n-1} - n(2n-1)B_n. \end{aligned}$$

On trouve bien

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2B_n.}$$

(f) Soit $n \geqslant 1$.

D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n > 0$ donc en divisant le résultat de la question précédente par n^2A_n, on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{(2n-1)B_{n-1}}{nA_n} - \frac{2B_n}{A_n}.$$

Or, d'après la question 2.(d), $\dfrac{2n-1}{nA_n} = \dfrac{2}{A_{n-1}}$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \frac{1}{n^2} = \frac{2B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{2B_n}{A_n}.}$$

(g) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2B_{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{2B_k}{A_k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{B_k}{A_k}.$$

On reconnaît une somme téléscopique et on obtient :

$$S_n = 2\left(\frac{B_0}{A_0} - \frac{B_n}{A_n}\right) = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n} = \frac{\frac{\pi^3}{12}}{\frac{\pi}{2}} - \frac{2B_n}{A_n}$$

d'où

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2B_n}{A_n}.}$$

3. Posons pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$.

   (a) La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \cos(x) - \dfrac{2}{\pi}$.
   Puisque cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que la fonction f' est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $f'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'

   $$\boxed{\text{il existe un unique}\, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que}\, f'(\alpha) = 0.}$$

   (b) On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

   On a $f(0) = \sin(0) - \dfrac{2}{\pi} \times 0 = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$.
   Puisque pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) \geqslant 0$ et pour tout $x \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) \leqslant 0$, la fonction f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ donc f.
   Ainsi, pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ et pour tout $x \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geqslant f(\frac{\pi}{2}) = 0$.
   On en déduit que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geqslant 0$, ce qui prouve que

   $$\boxed{\text{pour tout}\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x.}$$

4. Soit $n \geqslant 1$.
   Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

   $$\sin^2(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2}x^2 \quad \text{puis} \quad \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2}x^2\cos^{2(n-1)}(x)$$

   car $\cos^{2(n-1)x}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx \geqslant \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2(n-1)}(x)dx.$$

   D'après la question 2.(d), ceci implique que

   $$\frac{A_n}{2n-1} \geqslant \frac{4}{\pi^2}B_{n-1}.$$

   Or, d'après la question 1, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $B_{n-1} \geqslant B_n$, et on en déduit que

   $$\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant 1, \frac{A_n}{2n-1} \geqslant \frac{4}{\pi^2}B_n.}$$

5. On sait d'après la question 2.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n > 0$ et $B_n > 0$.
Il découle alors du résultat de la question précédente que pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 < \frac{B_n}{A_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4(2n-1)}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi^2}{4(2n-1)} = 0$, on en déduit grâce au théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{B_n}{A_n} = 0.$$

Or, d'après la question 2.(g), pour tout $n \geqslant 1, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2B_n}{A_n}$.
On en conclut que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Problème 2 : Une relation entre intégrales de bijections réciproques

Partie I : Préliminaires

1. (a) Sur $\mathbb{C}$, on a $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x^2 = i$ ou $x^2 = -i$.
Or, $x^2 = i \Leftrightarrow x^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow x = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $x = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
De même, $x^2 = -i \Leftrightarrow x^2 = e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ ou $x = -e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$.
Ainsi, les quatre nombres complexes vérifiant $x^4 = -1$ sont

$$\boxed{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{5i\frac{\pi}{4}}, e^{3i\frac{\pi}{4}}, e^{7i\frac{\pi}{4}}.}$$

(b) Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$x^4 + 1 = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{\frac{5i\pi}{4}})(x - e^{\frac{3i\pi}{4}})(x - e^{\frac{7i\pi}{4}}).$$

Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$, on multiplie entre eux les termes conjugués deux à deux. En effet, on a $\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$ et $\overline{e^{3i\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{-3i\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ d'où

$$\begin{aligned}
\boxed{x^4 + 1} &= (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}})(x - e^{\frac{3i\pi}{4}})(x - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}) \\
&= (x^2 - (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})x + 1)((x^2 - (e^{\frac{3i\pi}{4}} + e^{\frac{-3i\pi}{4}})x + 1) \\
&= (x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + 1)(x^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)x + 1) \\
&= \boxed{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).}
\end{aligned}$$

2. Soit $v : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

On en déduit que v est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, pour tout $x > 0, v(x) = v(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ d'où

$$\boxed{\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Preuve de la relation

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,a]$.
   D'après le théorème de la bijection, on en déduit que

   $$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,a] \text{ sur } J = f([0,a]) = [f(0), f(a)] = [0, f(a)].}$$

2. D'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est également continue sur J et de même monotonie que f.
   On en déduit que $\boxed{f^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur } J.}$

3. D'après l'énoncé, $f(0) = 0$. Puisque f est bijective, on en déduit que $\boxed{f^{-1}(0) = 0.}$

4. Soit $p > 0$. La fonction $f : x \mapsto x^p$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ de bijection réciproque $f^{-1} : x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$. On a alors

   $$\begin{aligned}
   \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx &= \int_0^a x^p dx + \int_0^{a^p} x^{\frac{1}{p}} dx \\
   &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^a + \left[\frac{x^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\right]_0^{a^p} \\
   &= \frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{p}{p+1}(a^p)^{\frac{p+1}{p}} \\
   &= \frac{p+1}{p+1}a^{p+1} \\
   &= a^{p+1} \\
   &= a \times a^p
   \end{aligned}$$

   donc on a bien dans ce cas

   $$\boxed{\int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a).}$$

5. (a) Puisque f et f^{-1} sont continues sur $[0,a]$, on sait d'après le théorème fondamental de l'analyse que les fonctions $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ et $G : t \mapsto \displaystyle\int_0^t f^{-1}(x)dx$ sont des primitives de f et f^{-1} respectivement sur $[0,a]$ et sur $J = [0, f(a)]$.
   On a alors :

   $$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,a], \varphi(t) = F(t) + G(f(t)) - tf(t).}$$

   (b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, F et G sont dérivables, donc continues, sur $[0,a]$ et sur $J = [0, f(a)]$ respectivement. Puisque $t \mapsto t$ et f sont continues sur $[0,a]$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,a]}$ comme composée de fonctions continues sur $[0,a]$.

   (c) On a dit dans la question précédente que F et G sont dérivables sur $[0,a]$ et sur $[0, f(a)]$ respectivement.
   D'après l'énoncé, f est dérivable sur $]0,a[$ et $f(]0,a[) =]f(0), f(a)[=]0, f(a)[\subset J$ par stricte croissance de f.
   Ainsi, φ est dérivable sur $]0,a[$ comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $t \in]0,a[$:

   $$\begin{aligned}
   \varphi'(t) &= F'(t) + f'(t)G'(f(t)) - f(t) - tf'(t) \\
   &= f(t) + f'(t)f^{-1}(f(t)) - f(t) - tf'(t) \\
   &= tf'(t) - tf'(t)
   \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } t \in]0,a[, \varphi'(t) = 0.}$

(d) On en déduit que φ est constante égale à une constante c sur l'intervalle $]0,a[$.
Or, φ est continue sur $[0,a]$ donc en particulier en 0 et en a. On obtient alors par continuité

$$\varphi(0) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = c = \lim_{t \to a} \varphi(t) = \varphi(a)$$

donc φ est constante sur $[0,a]$.
On en déduit que pour tout $t \in [0,a], \varphi(t) = \varphi(0)$. Or,

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(x)dx + \int_0^{f(0)} f^{-1}(x)dx - 0 \times f(0) \overset{f(0)=0}{=} \int_0^0 f^{-1}(x)dx = 0$$

donc pour tout $t \in [0,a], \varphi(t) = 0$, ce qui prouve que

$$\forall t \in [0,a], \int_0^t f(x)dx + \int_0^{f(t)} f^{-1}(x)dx - tf(t) = 0.$$

En évaluant cette dernière égalité en $t = a$, on obtient la relation $(*)$ souhaitée :

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a).}$$

6. (a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, on a d'après la formule de changement de variable :

$$\int_0^a tf'(t)dt = \int_0^a f^{-1}(f(t))f'(t)dt = \int_{f(0)}^{f(a)} f^{-1}(x)dx = \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx$$

(ou tout simplement en posant $x = f(t)$, on a bien $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(t)) = t$ et $dx = f'(t)dt$).

(b) En réalisant une intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = f'(t)$ et $v(t) = f(t)$ (ce qui est loisible car f et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$), on obtient

$$\int_0^a tf'(t)dt = [tf(t)]_0^a - \int_0^a f(t)dt = af(a) - \int_0^a f(t)dt.$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a) - \int_0^a f(t)dt$$

d'où

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a).}$$

Partie III : Application

1. (a) • Tout d'abord, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}], \tan(x) \geqslant 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est bien définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
• La fonction tan est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ comme composée d'applications continues.

• Puisque la fonction tan est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ comme composée d'applications strictement croissantes.
• On sait que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction tan est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}[, \tan(x) > 0$ donc $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ comme composée d'applications dérivables.
• Enfin, $\sqrt{\tan(0)} = \sqrt{0} = 0$.
On a donc bien montré que $\boxed{f \text{ satisfait les hypothèses de l'énoncé.}}$

(b) D'après la question 1 de la partie II, f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, f(\frac{\pi}{4})] = [0, 1]$.
Or, pour tout $y \in [0, 1]$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\tan(x)} \Leftrightarrow y^2 = \tan(x) \Leftrightarrow \arctan(y^2) = x$$

où la deuxième équivalence est vraie par bijectivité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et la dernière est vraie car pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}], \arctan(\tan(x)) = x$.
Ainsi, pour tout $y \in [0, 1]$, l'unique antécédent de y par f est $\arctan(y^2)$ donc

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0, \frac{\pi}{4}] \\ x & \mapsto & \arctan(x^2) \end{array}}$$

(c) Puisque f satisfait les hypothèses de l'énoncé, on peut appliquer la relation $(*)$ et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{f(\frac{\pi}{4})} f^{-1}(x)dx = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

i.e.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} + \int_0^1 \arctan(x^2)dx = \frac{\pi}{4}$$

donc

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(x^2)dx.}$$

2. (a) On pose $u(x) = \arctan(x^2), u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}, v'(x) = 1$ et $v(x) = x$.
Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 \arctan(x^2)dx = [x \arctan(x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^4}dx$$

d'où $\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\int_0^1 \arctan(x^2)dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx.$
D'après la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{I = 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx.}$$

(b) On cherche un réel a tel que pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{1+x^4} = a\left(\dfrac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \dfrac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right).$

On sait d'après la Partie I que pour tout réel $x, x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1+x^4} = a\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, a\frac{x(x^2+\sqrt{2}x+1)-x(x^2-\sqrt{2}x+1)}{1+x^4} = \frac{x^2}{1+x^4} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, 2a\sqrt{2}x^2 = x^2.
\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que $2a\sqrt{2} = 1$ donc $\boxed{a = \frac{1}{2\sqrt{2}}.}$

(c) D'après les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \frac{2x}{x^2-\sqrt{2x}+1}dx - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+\sqrt{2x}+1}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2x}+1}dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2x}+1}dx \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\Big)
\end{aligned}$$

Calculons ces quatre intégrales séparément.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2-\sqrt{2}x+1 > 0$ puisque les racines de ce trinôme du second degré sont complexes (d'après les résultats de la partie I) donc

$$\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2x}+1}dx = [\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)]_0^1 = \ln(2-\sqrt{2}).$$

• De même, on obtient

$$\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2x}+1}dx = [\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)]_0^1 = \ln(2+\sqrt{2}).$$

• On a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\dfrac{1}{2}}dx = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}dx.$$

Posons le changement de variable $u = \sqrt{2}x-1$ donc $du = \sqrt{2}dx$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = 2\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{u^2+1} = 2[\arctan(u)]_{-1}^{\sqrt{2}-1} = 2\arctan(\sqrt{2}-1)-2\arctan(-1)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = 2\arctan(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{2}.$$

• De même,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\dfrac{1}{2}}dx = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}dx.$$

Posons le changement de variable $u = \sqrt{2}x + 1$ donc $du = \sqrt{2}dx$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = 2\int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{du}{u^2+1} = 2[\arctan(u)]_1^{\sqrt{2}+1} = 2\arctan(\sqrt{2}+1) - 2\arctan(1)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = 2\arctan(\sqrt{2}+1) - \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(2-\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{2} - \ln(2+\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}+1) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + 2\arctan(\sqrt{2}-1) + 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\right). \end{aligned}$$

On sait d'après la Partie I que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $2\arctan(\sqrt{2}-1) + 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = \pi$.

Enfin, $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

On en conclut que

$$\boxed{I = \frac{\pi + \ln(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}.}$$