Lycée Fénelon — BCPST1
Année 2024-2025 — A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°7
Samedi 5 avril 2025 (4h00)

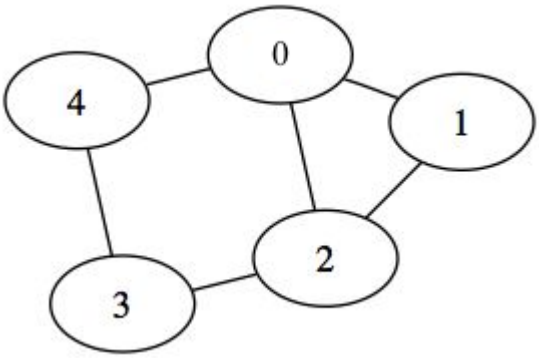
L'énoncé est constitué de trois exercices, deux problèmes et comporte 6 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Informatique

A rendre sur une copie séparée, ainsi que les questions suivantes :
- Exercice 3 : Questions 3.(a), (b),(c) et 4.

On considère le graphe non orienté suivant :



On rappelle que la liste d'adjacence du graphe est une liste contenant autant de listes que de sommets et dont la i-ème liste contient les voisins du sommet numéro i.
De même, on rappelle que la matrice M d'adjacence est définie par $M_{i,j} = 1$ si i et j sont voisins, 0 sinon.

1. Définir en `Python` la liste d'adjacence `L` du graphe et sa matrice d'adjacence `M`.
2. Ecrire une fonction `Python liste_a_matrice(L)` transformant la liste d'adjacence d'un graphe en sa matrice d'adjacence et une fonction `Python matrice_a_liste(M)` transformant la matrice d'adjacence d'un graphe en sa liste d'adjacence.

Exercice 2 : Axe radical de deux cercles

On suppose le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique.
Soient $\mathcal{C}$ et Γ deux cercles du plan de centres respectifs O et Ω et de rayons respectifs r et ρ.
On suppose que $\mathcal{C}$ et Γ ne sont pas concentriques, c'est à dire $O \neq \Omega$.
On appelle *puissance d'un point M par rapport au cercle* $\mathcal{C}$ la quantité

$$P_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - r^2.$$

On définit de même la puissance d'un point M par rapport au cercle Γ la quantité

$$P_{\Gamma}(M) = \Omega M^2 - \rho^2.$$

On considère l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan qui ont même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et à Γ, c'est à dire l'ensemble des points M tels que

$$P_{\mathcal{C}}(M) = P_{\Gamma}(M).$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé *l'axe radical* de $\mathcal{C}$ et Γ.
Dans le repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^2$, on suppose que O et Ω ont pour coordonnées respectives $(3, 2)$ et $(6, -1)$. Enfin, on pose $r = 7$ et $\rho = 1$.

1. Calculer la puissance $P_{\mathcal{C}}(M)$ d'un point M par rapport à $\mathcal{C}$ en fonction des coordonnées (x, y) de M puis donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Calculer la puissance $P_{\Gamma}(M)$ d'un point M par rapport à Γ en fonction des coordonnées (x, y) de M puis donner une équation cartésienne de Γ.

3. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Quelle est la nature de $\mathcal{D}$? Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $(O\Omega)$ sont perpendiculaires puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. Soit $\mathcal{C}'$ la partie du plan d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x - 7y - 3 = 0$. Justifier que $\mathcal{C}'$ est un cercle, puis préciser son centre et son rayon. Déterminer également la puissance $P_{\mathcal{C}'}(M)$ d'un point M de coordonnées (x, y) par rapport au cercle $\mathcal{C}'$.
5. Déterminer une équation cartésienne de l'axe radical $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ puis une équation cartésienne de l'axe radical $\mathcal{D}''$ de Γ et $\mathcal{C}'$.
6. Prouver que les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 3 : Méthode de Simpson

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux réels.
La méthode de Simpson est une méthode pour calculer numériquement une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par la formule

$$I_{a,b}(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

On rappelle qu'une méthode d'intégration numérique est d'ordre k si elle fournit un résultat exact lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

1. Montrer que la méthode de Simpson n'est pas d'ordre 4.
2. Montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3.
3. (a) Ecrire une fonction `simpson(f,a,b)` qui renvoie $I_{a,b}(f)$.
   (b) En déduire une fonction `simpson_composite(f,a,b,n)` qui calcule la généralisation composite de la méthode de Simpson, c'est à dire qui calcule

$$I_{a,b,n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} I_{x_k,x_{k+1}}(f)$$

   où $(x_0, \ldots, x_n)$ forme une subdivision régulièrement espacée de l'intervalle $[a, b]$.
   On rappelle que, après avoir importé la bibliothèque `numpy` par la commande `import numpy as np`, la fonction `np.linspace(a,b,n+1)` fournit une telle subdivision.
   (c) Comment choisir n pour que la fonction `simpson_composite(f,a,b,n)` fournisse une bonne approximation de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$?
4. Rappeler l'ordre de la méthode des rectangles. En général, faut-il préférer la méthode des rectangles ou la méthode de Simpson ?

Problème 1 : Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

L'objectif de ce problème est de prouver la célèbre formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)dx.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Calculer A_0 et B_0.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n > 0$ et $B_n > 0$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$A_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx.$$
   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx = \frac{A_n}{2n-1} = \frac{A_{n-1}}{2n}.$$
   Indication : commencer par montrer que $A_n = (2n-1)(A_{n-1} - A_n)$.
   (e) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2 B_n.$$
   (f) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{n^2} = \frac{2B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{2B_n}{A_n}.$$
   (g) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2B_n}{A_n}.$$
3. Soit $f : x \mapsto \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$.
   (a) Montrer que la fonction f' s'annule une seule fois sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$.
4. A l'aide de la question 2.(d) et de la question précédente, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\frac{A_n}{2n-1} \geqslant \frac{4}{\pi^2}B_n.$$
5. Conclure que
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problème 2 : Une relation entre intégrales de bijections réciproques

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable sur l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en 0.
Dans la première partie, on montre quelques résultats techniques qui seront utiles dans le calcul de l'intégrale définie dans la troisième partie.
Le but de la deuxième partie est de prouver la relation $(*)$:

$$(*) \quad \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a).$$

Dans la troisième partie, on appliquera cette relation pour calculer une intégrale explicite.

Partie I : Préliminaires

1. (a) Trouver les quatre nombres complexes vérifiant l'équation $x^4 = -1$.
   (b) En déduire que pour tout réel x,
   $$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Partie II : Preuve de la relation

1. Justifier que f réalise une bijection du segment $[0, a]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Que dire de la continuité et de la monotonie de f^{-1} ?
3. Que vaut $f^{-1}(0)$?
4. Vérifier la relation $(*)$ dans le cas où $f : x \mapsto x^p$ lorsque p est un nombre réel strictement positif.
5. Pour tout $t \in [0, a]$, on note
   $$\varphi(t) = \int_0^t f(x)dx + \int_0^{f(t)} f^{-1}(x)dx - tf(t).$$
   (a) Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et de f^{-1}.
   (b) Justifier que la fonction φ est continue sur $[0, a]$.
   (c) Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$.
   (d) En déduire la relation $(*)$.
6. On suppose dans cette question uniquement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$.
   (a) A l'aide du changement de variable $x = f(t)$, prouver que
   $$\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = \int_0^a tf'(t)dt.$$
   (b) Démontrer de nouveau la relation $(*)$.

Partie III : Application

Dans toute cette partie $a = \frac{\pi}{4}$ et $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$.
On souhaite utilier la relation $(*)$ pour déterminer la valeur de
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx.$$

1. (a) Vérifier que f satisfait les hypothèses de l'énoncé.
   (b) Déterminer f^{-1}.
   (c) En déduire que
   $$I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(x^2)dx.$$
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$I = 2\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^4}dx.$$

(b) Trouver un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{1+x^4} = a\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right).$$

(c) En conclure que

$$I = \frac{\pi + \ln(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}.$$