

Corrigé de la liste d'exercices n°18

Géométrie

Exercice 1

Notons $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit O le milieu du segment $[AB]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow OM = OA \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ puisque O est le milieu de $[AB]$.

Exercice 2

Notons I le milieu du segment $[AB]$. Notons (D) la droite passant par I et perpendiculaire à (AB) .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} AM = BM &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \|\overrightarrow{BM}\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in (D). \end{aligned}$$

Exercice 3

On a

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Un système d'équations paramétriques de la droite est $\begin{cases} x = 1 - 7\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Un vecteur normal à la droite est $\vec{n} = (4, 7)$ donc il existe un réel c tel que $4x + 7y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite. Puisque la droite passe par le point $A(1, 2)$, on a $4 \times 1 + 7 \times 2 + c = 0$ donc $c = -18$.

La droite admet donc pour équation cartésienne $4x + 7y - 18 = 0$.

2. Un vecteur directeur de la droite D est $\overrightarrow{AB} = (-6, 1)$. De plus, la droite passe par $A(1, 2)$ donc un système d'équations paramétriques de la droite D est $\begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Un vecteur normal à la droite D est $\vec{n} = (1, 6)$ donc il existe un réel c tel que $x + 6y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite D . Puisque la droite passe par le point $A(1, 2)$, on a $1 + 2 \times 6 + c = 0$ donc $c = -13$.

La droite admet donc pour équation cartésienne $x + 6y - 13 = 0$.

3. Soit D' la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$. Un vecteur normal à cette droite est $\vec{u} = (2, 1)$, qui est donc un vecteur directeur de D puisque D et D' sont perpendiculaires. Puisque D passe par $A(1, 2)$, un système d'équations paramétriques de (D) est $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Un vecteur normal à (D) est $\vec{n} = (-1, 2)$ donc il existe un réel c tel que $-x + 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite D . Puisque D passe par $A(1, 2)$, on a $-1 + 2 \times 2 + c = 0$ donc $c = -3$.

La droite D admet donc pour équation cartésienne $-x + 2y - 3 = 0$.

4. Puisque $\vec{n} = (-7, 4)$ est un vecteur normal à la droite D , celle-ci admet une équation cartésienne de la forme $-7x + 4y + c = 0$. Puisqu'elle passe par le point $A(1, 2)$, on a $-7 + 4 \times 2 + c = 0$ donc $c = -1$.

La droite D admet donc pour équation cartésienne $-7x + 4y - 1 = 0$.

Un vecteur directeur de D est alors $\vec{u} = (4, 7)$ donc D admet pour système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$ et pour vecteur normal $\vec{n} = (-3, 1)$ donc il existe un réel c tel que $-3x + y + c = 0$ soit une équation cartésienne de (AB) . Puisqu'elle passe par le point $A(1, 1)$, on a $-3 + 1 + c = 0$ donc $c = 2$.

Ainsi, la droite (AB) admet pour équation cartésienne $-3x + y + 2 = 0$.

Soit $H(x, y)$ le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . On a alors

$$\begin{cases} H \in (AB) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ (x - 3) + 3(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -3L_2 + L_1]{L_2 \leftarrow -3L_2 + L_1} \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 10y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point $H(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.

Exercice 6

Le point I a pour coordonnées $I(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Soit $I'(x_{I'}, y_{I'})$ le symétrique de I par rapport à la droite (AC) .

Soit $J(x_J, y_J)$ le milieu du segment $[II']$. Par définition, $J \in (AC)$ et les droites (IJ) et (AC) sont perpendiculaires.

La droite (AC) a pour équation cartésienne $\sqrt{3}x - y = 0$. On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J \in (AC) \\ \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}x_J - y_J = 0 \\ \frac{1}{2}(x_J - \frac{3}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_J - \frac{\sqrt{3}}{4}) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_J = \sqrt{3}x_J \\ 2x_J = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

d'où $J(\frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$.

Enfin, on a $x_J = \frac{x_I + x_{I'}}{2}$ et $y_J = \frac{y_I + y_{I'}}{2}$ d'où

$$x_{I'} = 2x_J - x_I = 0 \quad \text{et} \quad y_{I'} = 2y_J - y_I = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 7

• Calculons le point d'intersection de D_1 et D_2 , noté $A(x, y)$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ x - 2y = -5 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ -5y = -10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

donc $A(-1, 2)$.

• Calculons le point d'intersection de D_1 et D_3 , noté $B(x, y)$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 4x - 3y = 10 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ -15y = -10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

donc $B(3, \frac{2}{3})$.

• Calculons le point d'intersection de D_2 et D_3 , noté $C(x, y)$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 10 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -5 \\ 5y = 30 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 6 \end{array} \right.$$

donc $C(7, 6)$.

• Soit $H(x, y)$ le projeté orthogonal de C sur la droite $(AB) = D_1$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} H \in D_1 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 4(x - 7) - \frac{4}{3}(y - 6) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 4x - \frac{4}{3}y = 20 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ -\frac{40}{3}y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

donc $H(5, 0)$.

• L'aire du triangle ABC vaut alors $\frac{AB \times CH}{2}$.

On a $AB = \sqrt{4^2 + (-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ et $CH = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

donc l'aire du triangle ABC vaut $\frac{40}{3}$.

Exercice 8

- La hauteur issue de A admet comme vecteur normal $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c - b \\ 0 \end{pmatrix} = (c - b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $c - b \neq 0$ puisque les points B et C sont distincts, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $x + d = 0$, où d est à déterminer.

Or, elle passe par le point $A(0, a)$ donc $0 + d = 0$, d'où $d = 0$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $x = 0$.

- La hauteur issue de B admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ (qui n'est pas le vecteur nul, puisque $(a, c) \neq (0, 0)$ sinon les points A et C seraient confondus) donc elle admet une équation cartésienne de la forme $cx - ay + d = 0$, où d est à déterminer.

Or, elle passe par le point $B(b, 0)$ donc $cb + d = 0$, d'où $d = -cb$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $cx - ay - bc = 0$.

- La hauteur issue de C admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (qui n'est pas le vecteur nul, puisque $(a, b) \neq (0, 0)$ sinon les points A et B seraient confondus) donc elle admet une équation cartésienne de la forme $bx - ay + d = 0$, où d est à déterminer.

Or, elle passe par le point $C(c, 0)$ donc $bc + d = 0$, d'où $d = -bc$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $bx - ay - bc = 0$.

2. Cherchons le point d'intersection des trois hauteurs. Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = 0 \\ cx - ay - bc = 0 \\ bx - ay - bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ay + bc = 0 \\ ay + bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ay + bc = 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, les trois points sont alignés donc ABC n'est pas un triangle.

Ainsi, nécessairement $a \neq 0$ donc $y = -\frac{bc}{a}$.

Le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC (appelé orthocentre du triangle) est donc le point $H(0, -\frac{bc}{a})$.

Exercice 9

1. On a

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 = 2^2$$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $O(1, 2)$ et de rayon 2.

2. Soit (D) une droite passant par A et tangente à $\mathcal{C}$, c'est à dire qu'elle intersecte le cercle $\mathcal{C}$ en un seul point. Notons $H(x, y)$ ce point d'intersection. Alors H vérifie :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{C} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ (x+1)(x-1) + y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_2 \xleftarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (1-x)^2 - 2x - 4(1-x) = -1 \\ y = 1-x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y = 1-x \end{cases} \end{aligned}$$

d'où $(x, y) = (1, 0)$ ou $(x, y) = (-1, 2)$.

Notons $H_1(1, 0)$ et $H_2(-1, 2)$. Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont les droites (AH_1) et (AH_2) d'équations respectives $y = 0$ et $x + 1 = 0$.

Exercice 10

- Tout d'abord, puisque $H \in D$, $\|\overrightarrow{HM}\| \geq \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\| = d(M, D)$.
 • D'autre part, pour tout $A \in D$, puisque $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$, on a d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HM}\|^2$$

donc pour tout $A \in D$, $\|\overrightarrow{HM}\| \leq \|\overrightarrow{AM}\|$.

Ainsi, $\|\overrightarrow{HM}\|$ est un minorant de l'ensemble $\{\|\overrightarrow{AM}\|, A \in D\}$ et est donc inférieur au plus grand minorant de cet ensemble, i.e. $\|\overrightarrow{HM}\| \leq \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\|$.

Finalement, on a donc bien $\|\overrightarrow{HM}\| = \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\| = d(M, D)$.

- Soit $A(x_A, y_A)$ un point de D . Soit $\vec{n} = (a, b)$ un vecteur normal à la droite D .

On a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 - (ax_A + by_A)$. Or, $A \in D$ donc $ax_A + by_A + c = 0$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + c$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux puisque A et H appartiennent à D .

Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs normaux à D , ils sont colinéaires donc $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \pm \|\overrightarrow{HM}\| \|\vec{n}\| = \pm \|\overrightarrow{HM}\| \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ainsi, $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |ax_0 + by_0 + c| = \|\overrightarrow{HM}\| \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où

$$d(M, D) = \|\overrightarrow{HM}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

car $a^2 + b^2 > 0$ puisque $(a, b) \neq (0, 0)$.

- **Analyse :** Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$ passant par $A(4, 2)$ et située à distance 2 de l'origine.

On applique la question précédente avec $M = (0, 0)$, $d(M, D) = 2$ et on obtient

$$2 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Puisque $A(4, 2) \in D$, on a $4a + 2b + c = 0$ donc $|c| = |4a + 2b| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

En élevant cette égalité au carré, on obtient $16a^2 + 16ab + 4b^2 = 4a^2 + 4b^2$ d'où

$$2a(6a + 8b) = 0,$$

i.e. $a = 0$ ou $6a + 8b = 0$.

- Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$ et D admet pour équation $y = -\frac{c}{b}$. La distance de 0 à cette droite vaut alors 2 si et seulement si D a pour équation $y = 2$ ou $y = -2$. Mais A n'appartient pas à la droite d'équation $y = -2$ donc la seule équation possible dans ce cas est $y = 2$.

- Si $a \neq 0$, alors $b = -\frac{6a}{8} = -\frac{3}{4}a$. Une équation de D est alors

$$ax - \frac{3}{4}ay - 4a - 2\left(-\frac{3}{4}a\right) = 0$$

d'où en simplifiant par $a \neq 0$, $x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{2} = 0$, ou encore $4x - 3y - 10 = 0$.

• **Synthèse :**

- Soit D la droite d'équation $y = 2$. Alors $A(4, 2) \in D$ et $d(M, D) = 2$.

- Soit D' la droite d'équation $4x - 3y - 10 = 0$.

Alors $A(4, 2) \in D'$ et $d(M, D') = \frac{10}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$.

Les droites cherchées sont donc ces deux droites.

Exercice 11

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux deux à deux.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a $0 = \vec{0} \cdot \vec{u} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{u} + \beta\vec{v} \cdot \vec{u} + \gamma\vec{w} \cdot \vec{u} = \alpha\|\vec{u}\|^2$ puisque $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.

Puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $\|\vec{u}\|^2 > 0$ donc $\alpha\|\vec{u}\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

En prenant le produit scalaire avec $\vec{v}$ et avec $\vec{w}$, on montre de même que $\beta = \gamma = 0$.

Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12

1. La droite passe par le point $A(0, 2)$, admet pour base (i.e. pour vecteur directeur) $\vec{u} =$

$(1, 3)$ et donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2. La droite (AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$. On peut donc prendre comme base (ou vecteur directeur) de la droite le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Une

représentation paramétrique de la droite est alors $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Il admet pour base $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, -1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P donc

$$M(x, y, z) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 - (y - 2) = 0 \\ x - 1 - (z - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

3. On a

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z - 4 = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z + 2 \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z + 2, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -\frac{3}{2}, 0) + z(0, -\frac{5}{2}, 1) + (0, 2, 0). \end{aligned}$$

Donc si on note $A(0, 2, 0) \in P$, on a

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x(1, -\frac{3}{2}, 0) + z(0, -\frac{5}{2}, 1) = \frac{x}{2}(2, -3, 0) + \frac{z}{2}(0, -5, 2)$$

donc on peut prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (2, -3, 0)$ et $\vec{v} = (0, -5, 2)$.

Une représentation paramétrique du plan P est alors

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda - 5\mu \\ z = 2\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4. Une base du plan P est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où $\overrightarrow{AB} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2) = 2(1, 0, -1)$. On peut donc prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (0, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0, -1)$.

une représentation paramétrique du plan P est alors

$$\begin{cases} x &= 1 + \mu \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= \lambda - \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons un vecteur normal au plan P , i.e. cherchons $\vec{n} = (a, b, c)$ tel que

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c &= 0 \\ a - c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = c = -b.$$

Si on pose $a = 1$, on trouve $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Il existe donc un réel d tel qu'une équation cartésienne de P soit $x - y + z + d = 0$. Puisque le plan P passe par $B(1, -1, 0)$, on en déduit $d = -2$. Une équation cartésienne de P est alors $x - y + z - 2 = 0$.

5. On a

$$\begin{cases} 3x + y - z + 2 &= 0 \\ 2x + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -5x - 2 \\ z &= -2x \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -5x - 2, -2x) = x(1, -5, -2) + (0, -2, 0)$$

donc la droite passe par le point $A(0, -2, 0)$ et admet pour base (i.e. pour vecteur directeur) $\vec{u} = (1, -5, -2)$. Une représentation paramétrique de la droite est alors

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -2 - 5\lambda \\ z &= -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. On a $(x, y, z) = (0, 1, z) = z(0, 0, 1) + (0, 1, 0)$ donc la droite D passe par le point $A(0, 1, 0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

Une représentation paramétrique de la droite D est alors $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

7. La droite D passe par le point $A(-1, 0, 3)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, -5)$. Soit P le plan d'équation $2x - y - 5z = 0$. Il admet pour base $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, 2, 0)$ et $\vec{w} = (0, 5, -1)$. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P donc

$$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + 2y &= 0 \\ 5y - (z - 3) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 &= 0 \\ 5y - z + 3 &= 0 \end{cases}$$

8. Le plan P passe par le point $A(0, 1, -2)$ et admet pour base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, -1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

Cherchons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ normal au plan P . On a alors

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= \frac{3}{2}b \\ a &= -2b \end{cases}$$

Si on pose $b = 2$, on obtient $\vec{n} = (-4, 2, 3)$.

Il existe alors un réel d tel que P admet pour équation cartésienne $-4x + 2y + 3z + d = 0$. En utilisant les coordonnées du point $A(0, 1, -2) \in P$, on trouve $d = 4$.

Le plan P admet donc pour équation cartésienne $-4x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Exercice 13

Le plan (ABC) admet pour base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 4)$ et $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$. Il admet pour vecteur normal $\vec{n} = (1, 0, 0)$ et pour équation cartésienne $x = 1$.

Soit $H(1, y, z)$ le projeté orthogonal de $D(0, 1, 2)$ sur le plan (ABC) . On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 + 4(z - 2) &= 0 \\ -(y - 1) + z - 2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -4z + 9 \\ z &= 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 1 \\ z &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

donc le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(1, 1, 2)$.

Exercice 14

1. (a) • Le plan (OAB) admet pour base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ où $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{OB} = (3, 2, 0)$.
Soit $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur normal au plan (OAB) . Alors

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c &= 0 \\ 3a + 2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= -2a \\ b &= -\frac{3}{2}a \end{cases}$$

En posant $a = 2$, on trouve $\vec{n} = (2, -3, 4)$.

Puisque le plan (OAB) passe par le point $O(0, 0, 0)$, il admet donc pour équation cartésienne $2x - 3y + 4z = 0$.

- Le plan (OCD) admet pour base $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ où $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 1)$ et $\overrightarrow{OD} = (1, 0, 4)$.
Soit $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur normal au plan (OCD) . Alors

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OD} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c &= 0 \\ a + 4c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= -7c \\ a &= -4c \end{cases}$$

En posant $c = 1$, on trouve $\vec{n} = (-4, 7, 1)$.

Puisque le plan (OCD) passe par le point $O(0, 0, 0)$, il admet donc pour équation cartésienne $-4x + 7y + z = 0$.

- (b) Appelons D la droite obtenue en intersectant ces deux plans. Elle admet pour équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ -4x + 7y + z &= 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ y + 9z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{31}{2}z \\ y &= -9z \end{cases}$$

d'où $(x, y, z) = \frac{z}{2}(-31, -18, 2)$ donc la droite D est la droite passant par $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-31, -18, 2)$.

2. Dans l'espace, deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Déterminons un vecteur directeur pour chacune de ces droites.

On

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in D_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z &= 1 \\ y - z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2z + 1 \\ y &= z + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2z + 1, z + 2, z) = z(2, 1, 1) + (1, 2, 0) \end{aligned}$$

donc un vecteur directeur de D_1 est $\vec{u} = (2, 1, 1)$.

De même,

$$(x, y, z) \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y + z = a - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 - a \\ z = 3y + a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-4y + 2 - a, y, 3y + a - 1) = y(-4, 1, 3) + (2 - a, 0, a - 1)$$

donc un vecteur directeur de D_2 est $\vec{v} = (-4, 1, 3)$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

Calculons l'intersection $D_1 \cap D_2$. On a

$$(x, y, z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ -2y + 4z = a - 1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2} \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ 4z = -2 \\ 2z = a + 3 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ 4z = -2 \\ 0 = 2a + 8 \end{cases}$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le système est compatible, i.e. si et seulement si $a = -4$ et dans ce cas le point d'intersection de D_1 et D_2 est $(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Ainsi, D_1 et D_2 sont coplanaires si et seulement si $a = -4$ et dans ce cas, elles sont contenues dans le plan passant par le point $(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ et de base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3. (a) Déterminons un vecteur directeur pour chacune de ces droites. On a

$$(x, y, z) \in D_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 5z = -2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z + 4 \\ y = 4z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-7z + 4, 4z - 2, z) = z(-7, 4, 1) + (4, -2, 0)$$

donc un vecteur directeur de D_3 est $\vec{u} = (-7, 4, 1)$.

De même,

$$(x, y, z) \in D_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ y - 4z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z + 9 \\ y = 4z - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-7z + 9, 4z - 5, z) = z(-7, 4, 1) + (9, -5, 0)$$

donc un vecteur directeur de D_4 est $\vec{u} = (-7, 4, 1)$.

Les droites D_3 et D_4 ayant même vecteur directeur, elles sont parallèles (et non confondues car $(9, -5, 0) \notin D_3$).

(b) Soit $A(4, -2, 0) \in D_1$ et $B(9, -5, 0) \in D_2$.

Le plan P qui contient D_3 et D_4 est alors le plan passant par le point A et de base $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ où $\overrightarrow{AB} = (5, -3, 0)$ (qui est bien non colinéaire à $\vec{u}$).

Cherchons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ normal au plan P , i.e.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a + 4b + c = 0 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{5}{3}a \\ b = \frac{5}{3}a \end{cases}$$

En posant $a = 3$, on obtient $\vec{n} = (3, 5, 1)$.

Il existe alors un réel d tel que P admette pour équation cartésienne $3x + 5y + z + d = 0$.

En utilisant les coordonnées du point A , on trouve $d = -2$ donc P admet pour équation cartésienne $3x + 5y + z - 2 = 0$.