Liste d'exercices n°20

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

Si oui, donner la dimension de leur noyau et de leur image.

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + 1, y)$

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (x - y, x + 3y, x)$

3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (|x| - x, |y| - y)$

4. $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, y, z) \longmapsto z - y$

5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (x, 1, y)$

6. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (x + 7y, xy, 2x - y)$

7. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y, x - y)$

8. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x^2, 0)$

9. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (3x - y, y + 5z, y)$

10. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (a^2x - y, y, 0)$
avec a un réel.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E . On suppose que f et g commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que $\ker(f)$ est stable par g , i.e. $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(f)$ est stable par g , i.e. $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

1. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.
2. Soit $F = \text{Vect}\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. Vérifier que F est stable par f et donner la matrice de $f|_F$ dans la base $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$. Quel est le rang de cette matrice ?

Exercice 5. Expliciter l'application linéaire canoniquement associée à chacune des matrices suivantes, puis donner son image et son noyau.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 20 \\ 7 & 35 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on pose

$$\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_3 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Expliciter les endomorphismes f , g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
  - (a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = A$;
  - (b) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) = A$;
  - (c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) = A$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image des endomorphismes f , g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
  - (a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = B$;
  - (b) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) = B$;
  - (c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(h) = B$.

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $A^3 - 2A^2 + A - 2I_3 = 0$.
2. En déduire que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f .

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $\ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 et trouver deux réels x et y tels que le vecteur $(1, x, y)$ en constitue une base.
2. Montrer que $\ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 2 et trouver quatre réels s, t, u et v tels que $((1, s, t), (1, u, v))$ en soit une base.
3. On pose $\mathcal{B} = ((1, x, y), (1, s, t), (1, u, v))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D de f dans cette base.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Montrer que l'application f est un automorphisme et expliciter f^{-1} .

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On pose $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (4, 2, 1)$, et on appelle $\mathcal{B}$ la famille (u_1, u_2, u_3) .

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout entier naturel n , expliciter l'application f^n .

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n + 1$ réels distincts $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire et écrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Prouver que φ est un isomorphisme.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists f \in \mathcal{L}(E), \text{ telle que } \ker(f) = F \text{ et } \operatorname{Im}(f) = G \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n.$$

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

(b) Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ et que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ pour tout $k \geq p$.

2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.

(b) Vérifier que pour le même entier p trouvé en 1.(b), $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$ et que pour tout $k \geq p$, $\operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^p)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (y, z) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f), x = y + z.$$

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\ker(f) = \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E), f \circ h + h \circ f = \operatorname{Id}_E.$$