Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°8
Samedi 10 mai 2025 (4h00)

Exercice 1 : Informatique

1.
```
def transposee(M):
    n,p=np.shape(M)
    T=np.zeros((p,n))
    for i in range(p):
        for j in range(n):
            T[i,j]=M[j,i]
    return(T)
```

2.
```
def miroir(M):
    n,p=np.shape(M)
    miroir=np.zeros((n,p))
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            miroir[i,j]=M[i,-j-1]
    return(miroir)
```

3.
```
def moyenne_voisins(M,i,j):
    lig,col=np.shape(M)
    S=0
    n=0
    for k in range(i-1,i+2):
        for l in range(j-1,j+2):
            if k in range(0,lig) and l in range(0,col):
                S+=M[k,l]
                n+=1
    return S/n
```

4.
```
def supprime(M,i,j) :
    n,p=np.shape(M)
    nouvelle_M = np.zeros((n-1,p-1))
    nouvelle_M[:i,:j] = M[:i,:j]
    nouvelle_M[:i,j:] = M[:i,j+1:]
    nouvelle_M[i:,:j] = M[i+1:,:j]
    nouvelle_M[i:,j:] = M[i+1:,j+1:]
    return nouvelle_M
```

Exercice 2 : Espaces vectoriels matriciels

1. On a $\boxed{\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 3 \times 3 = 9}$ et $\boxed{\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3 \times 1 = 3.}$
2. Par définition, $F_A = \mathrm{Vect}(I_3, A)$, i.e. F_A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3 et A. Par propriété du cours, $\boxed{F_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

Ainsi, la famille (I_3, A) est une famille génératrice de F_A.
• S'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I_3$, la famille (I_3, A) est liée et on a alors $F_A = \operatorname{Vect}(I_3)$. Ainsi, I_3 (qui est une matrice non nulle) forme une base de F_A donc $\boxed{\dim(F_A) = 1.}$
• S'il n'existe pas de réel λ tel que $A = \lambda I_3$, la famille (I_3, A) est alors une famille libre et génératrice de F_A : c'est donc une base de F_A d'où $\boxed{\dim(F_A) = 2.}$

3. • Soit $0_{3,1}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a bien $A \times 0_{3,1} = 0_{3,1} \times A = 0_{3,1}$ donc $0_{3,1} \in C_A$.
• Soient $(M, N) \in C_A^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in C_A$.
Puisque $(M, N) \in C_A^2$, on a par propriété du produit matriciel :
$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$$
et
$$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda M + \mu N,$$
ce qui prouve que pour tout $(M, N) \in C_A^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda M + \mu N \in C_A$.
On a donc bien vérifié que $\boxed{C_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

4. (a) Supposons par l'absurde qu'il existe une matrice inversible $M \in C_A$. Par définition, on a $AM = M$.
En multipliant à droite cette égalité par M^{-1}, on obtient $AMM^{-1} = MM^{-1}$, i.e. $A = I_3$, ce qui est absurde car A est supposée non diagonale.
Ainsi, $\boxed{\text{aucune matrice de } C_A \text{ n'est inversible.}}$
(b) Soit $M \in C_A \cap F_A$.
Puisque $M \in F_A$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, M = \lambda I_3 + \mu A$.
Puisque $M \in C_A$, on a
$$AM = M \Leftrightarrow A(\lambda I_3 + \mu A) = \lambda I_3 + \mu A \Leftrightarrow \lambda A + \mu A^2 = \lambda I_3 + \mu A \Leftrightarrow \lambda A + \mu I_3 = \mu A + \lambda I_3.$$
Puisque A n'est pas une matrice diagonale, il n'existe pas de réel α tel que $A = \alpha I_3$, i.e. les matrices A et I_3 ne sont pas colinéaires donc la famille (A, I_3) est libre.
On peut donc identifier les cœfficients et en déduire que $\lambda = \mu$, ce qui implique que $M = \lambda(I_3 + A)$.
Ceci prouve que $C_A \cap F_A \subset \{\lambda(I_3 + A), \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(I_3 + A)$.
Réciproquement, montrons que $\operatorname{Vect}(I_3 + A) \subset C_A \cap F_A$.
On a clairement $I_3 + A \in \operatorname{Vect}(I_3, A) = F_A$.
De plus, $A(I_3 + A) = A + A^2 = A + I_3$ et $(I_3 + A)A = A + A^2 = A + I_3$ donc $A + I_3 \in C_A$.
Ainsi, $A + I_3 \in C_A \cap F_A$. Or, d'après les questions 2 et 3, on sait que C_A et F_A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $C_A \cap F_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui contient $I_3 + A$.
Puisque $\operatorname{Vect}(I_3 + A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui contient $I_3 + A$, on en déduit que $\boxed{C_A \cap F_A = \operatorname{Vect}(I_3 + A).}$
Puisque A n'est pas une matrice diagonale, a fortiori $A \neq -I_3$ donc $A + I_3 \neq 0$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{la matrice } I_3 + A \text{ est une base de } C_A \cap F_A}$.
A fortiori, $\dim(C_A \cap F_A) = \dim(\operatorname{Vect}(I_3 + A)) = 1$.
(c) On a $J^2 = (A - I_3)^2 = A^2 - 2A + I_3$ (car A et I_3 commutent) donc $J^2 = 2I_3 - 2A$.
On en déduit que $J^2 + 2J = 2I_3 - 2A + 2A - 2I_3 = 0$.
Les réels cherchés sont donc $\boxed{(a, b, c) = (1, 2, 0).}$

(d) Supposons que J est inversible. D'après la question précédente, on sait que $J^2+2J=0$.
En multipliant par J^{-1}, on obtient $J+2I_3=0$ d'où $(A-I_3)+2I_3=0$, i.e. $A=-I_3$, ce qui est absurde, car A n'est pas une matrice diagonale.
On en conclut que $\boxed{J \text{ n'est pas inversible.}}$

5. D'après la question 2, puisque A n'est pas une matrice scalaire, $\boxed{(I_3, A) \text{ est une base de } F_A.}$

6. Soit $M=\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in C_A &\Leftrightarrow AM=MA=M \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,3} & m_{1,2} & m_{1,1} \\ m_{2,3} & m_{2,2} & m_{2,1} \\ m_{3,3} & m_{3,2} & m_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_{1,1}=m_{3,3}=m_{1,3}=m_{3,1} \\ m_{1,2}=m_{3,2} \\ m_{2,1}=m_{2,3} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow M=\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,1} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,1} \\ m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,1} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M=m_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

donc $C_A=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
Montrons que ces quatre matrices forment une famille libre.
Soient $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tels que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \gamma & \delta & \gamma \\ \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta$$

donc ces quatre matrices forment bien une famille libre, et génératrice de C_A.

Ainsi, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } C_A.}$

7. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $A-\lambda I_3$.

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\lambda L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

.

• Si $\lambda = 1$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1.

• Si $\lambda = -1$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

• Si $\lambda \neq \{-1, 1\}$, on a obtenu une matrice échelonnée avec 3 pivots non nuls ($1, 1-\lambda$ et $1-\lambda^2$) donc la matrice est de rang 3.

Finalement, on a bien prouvé que $\boxed{\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1\}.}$

8. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$X \in A_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = z \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $A_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, ce qui prouve que $\boxed{A_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, on en déduit qu'elles forment une famille libre et génératrice de A_1.

Ainsi, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } A_1}$, donc $\boxed{\dim(A_1) = 2.}$

9. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$X \in A_{-1} \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $A_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, ce qui prouve que

$$\boxed{A_{-1} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension } 1}$$

dont une base est la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrons que P est inversible et calculons son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Enfin, on a

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien montré que $\boxed{P^{-1}AP = D}$ où $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Problème : Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Partie I : Sommes de sous-espaces vectoriels

1. Tout d'abord, puisque G est un sous-espace vectoriel de $E, 0_E \in G$ donc pour tout $u \in F, u + 0_E = u \in F + G$, ce qui prouve l'inclusion $F \subset F + G$. L'inclusion $G \subset F + G$ se montre de même.
   Montrons maintenant que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   • Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E, 0_E \in F \cap G$ donc
   $$0_E = 0_E + 0_E \in F + G.$$
   • Soient $(x, y) \in (F + G)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in F + G$.
   Il existe $(u, v) \in F \times G$ tels que $x = u + v$ et $(u', v') \in F \times G$ tels que $y = u' + v'$.
   Ainsi,
   $$\lambda x + \mu y = \lambda(u + v) + \mu(u' + v') = (\lambda u + \mu u') + (\lambda v + \mu v').$$
   Or, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E, \lambda u + \mu u' \in F$ et $\lambda v + \mu v' \in G$ donc $\lambda x + \mu y \in F + G$.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } F + G \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E \text{ contenant } F \text{ et } G.}$$

2. (a) • Supposons que F et G sont en somme directe, i.e. $F \cap G = \{0_E\}$.
   Soient $(u, v) \in F \times G$ tels que $u + v = 0_E$. Alors $u = -v$ et puisque $v \in F$, ceci implique que $u \in F$ donc $u \in F \cap G = \{0_E\}$ d'où $u = 0_E$ puis $v = -u = 0_E$.

• Supposons que pour tout tout $(u,v) \in F \times G$, si $u+v=0_E$, alors $u=v=0_E$. Montrons que F et G sont en somme directe, i.e. $F \cap G = \{0_E\}$.

On a toujours $\{0_E\} \subset F \cap G$ car 0_E appartient à tous les sous-espaces vectoriels de E. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $u \in F \cap G$. Alors $u + (-u) = 0_E$ avec $u \in F$ et $-u \in G$ car $u \in G$.

D'après l'hypothèse, ceci implique que $u = 0_E$ donc $F \cap G \subset \{0_E\}$ et finalement $F \cap G = \{0_E\}$.

On a donc bien montré l'équivalence souhaitée.

(b) • Supposons que F et G sont en somme directe, i.e. $F \cap G = \{0_E\}$.

Soi $x \in F+G$. Montrons qu'il existe un unique couple $(u,v) \in F \times G$ tel que $x = u+v$.

Supposons qu'il existe $(u,v) \in F \times G$ et $(u',v') \in F \times G$ tels que $x = u+v = u'+v'$.

Alors $u - u' = v' - v \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $u - u' = 0_E$ et $v' - v = 0_E$, i.e. $u = u'$ et $v = v'$ d'où l'unicité du couple $(u,v) \in F \times G$ tel que $x = u+v$.

• Supposons que pour tout $x \in F+G$, il existe un unique couple $(u,v) \in F \times G$ tel que $x = u+v$.

Montrons que F et G sont en somme directe.

Soient $(u,v) \in F \times G$ tels que $u + v = 0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$.

D'après l'hypothèse d'unicité, on a nécessairement $u = 0_E$ et $v = 0_E$.

On a donc prouvé que si $(u,v) \in F \times G$ avec $u+v = 0_E$, alors $u = v = 0_E$, ce qui prouve d'après la question précédente qu F et G sont en somme directe.

On a donc bien montré l'équivalence voulue.

3. (a) • Montrons que la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$.

Soit $x \in F \oplus G$. Il existe $(u,v) \in F \times G$ tel que $x = u+v$.

Puisque $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille génératrice de F (puisque c'en est une base), il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$.

De même, puisque $(g_1, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice de G (puisque c'en est une base), il existe des scalaires $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j$.

Donc $x = u + v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.

Ainsi, $F \oplus G \subset \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ et l'autre inclusion est immédiate puisque pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i \in F \subset F \oplus G$ et pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, $g_j \in G \subset F \oplus G$.

On a donc $F \oplus G = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ donc la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est génératrice de $F \oplus G$.

• Montrons que la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre.

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j = 0_E$.

Il faut montrer que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i = 0$ et pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, $\mu_j = 0$.

Posons $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \in F$ et $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j \in G$.

On a alors $u+v = 0_E$ et puisque F et G sont en somme directe, ceci implique d'après la question 2.a) que $u = v = 0_E$ i.e.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j = 0_E.$$

Or, les familles $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ sont libres (puisque ce sont des bases de F et de G respectivement), donc pour tout $i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$ et pour tout $j \in [\![1, q]\!], \mu_j = 0$.
La famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est donc bien une famille libre de $F \oplus G$, en plus d'être génératrice.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q) \text{ est donc une base de } F \oplus G.}$$

(b) On a trouvé en question précédente une base de $F \oplus G$ à $p + q$ éléments donc $\boxed{\dim(F \oplus G) = p + q = \dim(F) + \dim(G).}$

4. (a) La famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de E puisque c'est une base de F. On a nécessairement $p \leqslant n$ puisque $\dim(E) = n$ donc toute famille libre de E a au plus n éléments.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ tels que $\boxed{(f_1, \ldots, f_n) \text{ forme une base de } E}$.

(b) • Tout d'abord, montrons que $F + H = E$. On a de façon immédiate l'inclusion $F + H \subset E$. Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in E$. Puisque $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E, il existe des scalaires (uniques) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k}_{\in F} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} f_k}_{\in H} \in F + H$$

d'où l'inclusion $E \subset F + H$ et donc l'égalité $E = F + H$.
• Montrons que F et H sont en somme directe. On a déjà que $E = F + H$ et d'après l'item précédent, pour tout $x \in E$, il existe des scalaires uniques $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$. En posant $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k \in F$ et $v = \sum_{k=+1}^{n} \lambda_k f_k \in H$, le couple (u, v) est alors l'unique couple de $F \times H$ tel que $x = u + v$.
D'après la question 2.b), ceci implique que F et H sont en somme directe et on a donc bien $\boxed{F \oplus H = E}$.

5. (a) • Montrons que $F + H = F + G$. Puisque $H \subset G$, on a clairement l'inclusion

$$F + H = \{u + v | (u, v) \in F \times H\} \subset \{u + v | (u, v) \in F \times G\} = F + G.$$

Montrons que $F + G \subset F + H$.
Soit $x \in F + G$, i.e. il existe $(u, v) \in F \times G$ tels que $x = u + v$.
Puisque $G = (F \cap G) \oplus H$, il existe $(f, h) \in (F \cap G) \times H$ tel que $v = f + h$.
Ainsi, $x = u + f + h$. Or, $(u, f) \in F^2$ donc $u + f \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel de E. On en déduit que

$$x = \underbrace{(u + f)}_{\in F} + \underbrace{h}_{\in H} \in F + H,$$

ce qui prouve l'inclusion $F+G \subset F+H$ et donc l'égalité $F+H=F+G$.

• Montrons que F et H sont en somme directe, i.e. $F \cap H = \{0_E\}$.

Puisque $H \subset G$, on a $H = H \cap G$ donc $F \cap H = F \cap (H \cap G) = (F \cap G) \cap H = \{0_E\}$ puisque $F \cap G$ et H sont en somme directe par hypothèse.

Finalement, on a bien $\boxed{F \oplus H = F+G.}$

(b) D'après la question 3.b), $\dim(F \oplus H) = \dim(F) + \dim(H)$ donc puisque $F+G = F \oplus H$, on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(H)$.

Par ailleurs, puisque $(F \cap G) \oplus H = G$, on a $\dim(F \cap G) + \dim(H) = \dim(G)$ d'où $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Ainsi, il vient $\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).}$

Partie II : Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

1. •$(0,0,0) \in F^\perp$ puisque pour tout $u = (x,y,z) \in F, (x,y,z) \cdot (0,0,0) = 0$.

• Soient $(u,u') \in (F^\perp)^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\lambda u + \mu u' \in F^\perp$.

Soit $v \in F$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$(\lambda u + \mu u') \cdot v = \lambda (u \cdot v) + \mu (u' \cdot v).$$

Or, $(u,u') \in (F^\perp)^2$ donc $u \cdot v = u' \cdot v = 0$ d'où $(\lambda u + \mu u') \cdot v = 0$ et ce pour tout $v \in F$. Donc $\lambda u + \mu u' \in F^\perp$.

On a donc bien montré que $\boxed{F^\perp \text{est un sous-espace vectoriel de} \, \mathbb{R}^3.}$

2. (a) • On a clairement $\{(0,0,0)\}^\perp \subset \mathbb{R}^3$.

D'autre part, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) \cdot (0,0,0) = 0$ donc $(x,y,z) \in \{(0,0,0)\}^\perp$, ce qui implique que $\mathbb{R}^3 \subset \{(0,0,0)\}^\perp$. Finalement, $\boxed{\{(0,0,0)\}^\perp = \mathbb{R}^3.}$

Ainsi, si $\dim(F) = 0, \dim(F^\perp) = 3$ donc $\dim(F) + \dim(F^\perp) = 3$.

• On a $(0,0,0) \in (\mathbb{R}^3)^\perp$ puisque $(\mathbb{R}^3)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc $\{(0,0,0)\} \in (\mathbb{R}^3)^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^\perp$. Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) \cdot v = 0$ donc en particulier, $(x,y,z) \cdot (x,y,z) = 0$, i.e. $\|(x,y,z)\|^2 = 0$ d'où $(x,y,z) = (0,0,0)$.

on a donc bien l'égalité $\boxed{\{(0,0,0)\} = (\mathbb{R}^3)^\perp.}$

Ainsi, si $\dim(F) = 3$, alors $\dim(F^\perp) = 0$ donc $\dim(F) + \dim(F^\perp) = 3$.

(b) Soit (a,b,c) un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(a,b,c)$. On a alors les équivalences suivantes :

$$(x,y,z) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(a,b,c) \cdot (x,y,z) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = 0.$$

C'est une équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ et donc $\dim(F^\perp) = 2$.

$\boxed{\text{Ainsi}\,, F^\perp \,\text{est le plan de}\, \mathbb{R}^3 \,\text{d'équation cartésienne}\, ax+by+cz=0 \,\text{et}\, \dim(F^\perp) = 2.}$

On en déduit que si $\dim(F) = 1$, alors $\dim(F^\perp) = 2$ donc $\dim(F) + \dim(F^\perp) = 3$.

(c) Soit $(x,y,z) \in F^\perp$. Alors $(x,y,z) \cdot (a,b,c) = (x,y,z) \cdot (a',b',c') = 0$ donc $\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0 \end{array} \right.$

Réciproquement, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0 \end{array} \right.$.

Soit $t \in F$. Il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t = \lambda u + \mu v$.

On a alors

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z)\cdot t & = & (x,y,z)\cdot(\lambda u+\mu v)\\ & = & (x,y,z)\cdot(\lambda a+\mu a',\lambda b+\mu b',\lambda c+\mu c')\\ & = & \lambda(ax+by+cz)+\mu(a'x+b'y+c'z)\\ & =0 & .\end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{(x,y,z)\in F^{\perp}\ \text{ si et seulement si }\ \left\{\begin{array}{rcl}ax+by+cz & = & 0\\ a'x+b'y+c'z & = & 0\end{array}\right.}.$$

On reconnaît un système d'équations cartésiennes d'une droite de $\mathbb{R}^3$ (puisque les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas colinéaires) donc

$$\boxed{\dim(F^{\perp})=1.}$$

On en déduit que si $\dim(F)=2$, alors $\dim(F^{\perp})=1$ donc $\dim(F)+\dim(F^{\perp})=3$.

3. (a) D'après les questions précédentes, on a vérifié que si $\dim(F)\in[\![0,3]\!]$, alors

$$\dim(F)+\dim(F^{\perp})=3$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathbb{R}^3, \dim(F)+\dim(F^{\perp})=3.}$$

(b) • Montrons que F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.
Soit $(x,y,z)\in F\cap F^{\perp}$. Alors (x,y,z) est orthogonal à tout vecteur de F donc en particulier à lui-même, i.e.

$$\|(x,y,z)\|^2=(x,y,z)\cdot(x,y,z)=0$$

d'où $(x,y,z)=(0,0,0)$, ce qui implique que $F\cap F^{\perp}=\{(0,0,0)\}$ (l'inclusion $\{(0,0,0)\}\subset F\cap F^{\perp}$ étant immédiate).

• On a alors d'après la question 3.b) de la première partie,

$$\dim(F\oplus F^{\perp})=\dim(F)+\dim(F^{\perp})=3$$

d'après la question précédente.
Ainsi, $F\oplus F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.
Nécessairement, $\boxed{F\oplus F^{\perp}=\mathbb{R}^3.}$

4. (a) Soit $u\in F$. Par définition, pour tout $v\in F^{\perp}, u\cdot v=0$ donc $u\in(F^{\perp})^{\perp}$, ce qui prouve l'inclusion $\boxed{F\subset(F^{\perp})^{\perp}.}$

(b) D'après la question 3.a), on a $\dim(F^{\perp})=3-\dim(F)$.
D'après la même question appliquée à l'espace $F^{\perp}$, on a $\dim(F^{\perp})+\dim((F^{\perp})^{\perp})=3$ donc $\dim(F^{\perp})=3-\dim((F^{\perp})^{\perp})$.
Ainsi, $3-\dim(F)=3-\dim((F^{\perp})^{\perp})$ d'où $\dim(F)=\dim((F^{\perp})^{\perp})$.
Puisque $\left\{\begin{array}{rcl}F & \subset & (F^{\perp})^{\perp}\\ \dim(F) & = & \dim((F^{\perp})^{\perp})\end{array}\right.$, on en déduit que $\boxed{F=(F^{\perp})^{\perp}.}$

5. (a) Supposons que $F\subset G$. Soit $u\in G^{\perp}$.
Pour tout $v\in F$, alors $v\in G$ donc $u\cdot v=0$, ce qui prouve que $u\in F^{\perp}$ d'où l'inclusion $\boxed{G^{\perp}\subset F^{\perp}.}$

(b) • On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$ donc d'après la question précédente $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

• Montrons l'inclusion $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

Soit $u \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $x \in F+G$. Il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f+g$ et on a

$$u \cdot x = u \cdot (f+g) = u \cdot f + u \cdot g.$$

Puisque $u \in F^{\perp}, u \cdot f = 0$. De même, puisque $u \in G^{\perp}, u \cdot g = 0$ donc $u \cdot f + u \cdot g = 0$, i.e. $u \cdot x = 0$, et ce pour tout $x \in F+G$ donc $u \in (F+G)^{\perp}$.

Ceci prouve l'inclusion $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$ et donc l'égalité $\boxed{(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.}$

(c) En appliquant la question précédente à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$, on trouve

$$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp}.$$

Or, d'après la question 4.b), $(F^{\perp})^{\perp} = F$ et $(G^{\perp})^{\perp} = G$ d'où

$$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = F \cap G,$$

d'où en prenant l'orthgonal de ces deux espaces

$$((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$$

et encore en utilisant la même question, on en conclut que

$$\boxed{F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}.}$$

Partie III : Etude d'un exemple

1. (a) On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 5z = 0\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}z\right\} \\ &= \left\{\left(x, \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}z, z\right), (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x\left(1, \frac{2}{3}, 0\right) + z\left(0, \frac{5}{3}, 1\right), (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{\left(1, \frac{2}{3}, 0\right), \left(0, \frac{5}{3}, 1\right)\right\} \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\left\{(3,2,0), (0,5,3)\right\}.} \end{aligned}$$

La famille $(3,2,0), (0,5,3)$ est une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de F : c'est donc une base de F d'où $\boxed{\dim(F) = 2.}$

(b) D'après la question 2.c) de la partie précédente, $F^{\perp}$ est la droite d'équations cartésiennes

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 0 \\ 5y+3z &=& 0 \end{array}\right.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -\frac{3}{2}x \\ z &=& \frac{-5}{3}y = \frac{5}{2}x \end{array}\right.$$

donc $(x,y,z) \in F^{\perp}$ si et seulement si $(x,y,z) = (x, -\frac{3}{2}x, \frac{5}{2}x) = x(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ donc

$$\boxed{F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \mathrm{Vect}\,(2,-3,5)}.$$

Le vecteur $(2,-3,5)$ est alors une base de $F^{\perp}$ et $\boxed{\dim(F^{\perp}) = 1.}$

2. (a) On a

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3z=0\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=-3z\right\} \\ & = & \left\{(-3z,y,z)\,,(y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \left\{y\,(0,1,0)+z\,(-3,0,1)\,,(x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \boxed{\mathrm{Vect}\,\{(0,1,0)\,,(-3,0,1)\}} \end{array}$$

La famille $(0,1,0), (-3,0,1)$ est une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de G : c'est donc une base de G d'où $\boxed{\dim(G)=2.}$

(b) D'après la question 2.c) de la partie précédente, $G^{\perp}$ est la droite d'équations cartésiennes

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -3x+z & = & 0 \end{array}\right.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 3x \end{array}\right.$$

donc $(x,y,z) \in G^{\perp}$ si et seulement si $(x,y,z)=(x,0,3x)=x(1,0,3$ donc

$$\boxed{G^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(1,0,3)}.$$

Le vecteur $(1,0,3)$ est alors une base de $G^{\perp}$ et $\boxed{\dim(G^{\perp})=1.}$

3. (a) Soit $(x,y,z) \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Puisque $(x,y,z) \in F^{\perp}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=\lambda(2,-3,5)=(2\lambda,-3\lambda,5\lambda).$$

Puisque $(x,y,z) \in G^{\perp}$, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=\mu(1,0,3)=(\mu,0,3\mu).$$

On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda & = & \mu \\ -3\lambda & = & 0 \\ 5\lambda & = & 3\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda=\mu=0$$

donc $(x,y,z)=(0,0,0)$.
Ceci prouve que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset \{(0,0,0)\}$ et puisque l'inclusion réciproque est immédiate, on en conclut que $\boxed{F^{\perp} \cap G^{\perp} = (0,0,0).}$

(b) D'après la question 5.b) de la partie précédente, on a $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} = \{(0,0,0)\}$ d'où $((F+G)^{\perp})^{\perp} = \{(0,0,0)\}^{\perp} = \mathbb{R}^3$.
Puisque $((F+G)^{\perp})^{\perp} = F+G$ d'après la question 4.b) de la partie précédente, on en déduit que $\boxed{F+G=\mathbb{R}^3.}$
Si la somme était directe, on aurait

$$3=\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)=2+2=4,$$

ce qui est absurde!

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ ne sont donc pas en somme directe.}}$$

(c) Puisque $F = \text{Vect}\{(3,2,0),(0,5,3)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0,1,0),(-3,0,1)\}$, on a alors

$$\mathbb{R}^3 = F + G = \text{Vect}\{(3,2,0),(0,5,3),(0,1,0),(-3,0,1)\}.$$

$\boxed{\text{La famille }((3,2,0),(0,5,3),(0,1,0),(-3,0,1))\text{ est donc une famille génératrice de }\mathbb{R}^3.}$

On peut alors en extraire une base.

Montrons par exemple que la famille $(3,2,0),(0,1,0),(-3,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, en montrant qu'elle est libre.

Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha(3,2,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(-3,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3\alpha - 3\gamma & = & 0 \\ 2\alpha + \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$\boxed{\text{La famille }(3,2,0),(0,1,0),(-3,0,1)\text{ est donc libre,}}$ et puisqu'elle est constituée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, $\boxed{\text{c'est une base de }\mathbb{R}^3.}$

4. (a) On a les équivalences suivantes :

$$(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 5z & = & 0 \\ x + 3z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{1}{3}z \\ x & = & -3z \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = z(-3, -\frac{1}{3}, 1)$$

donc $\boxed{F \cap G = \text{Vect}\left(-3, -\frac{1}{3}, 1\right) = \text{Vect}(9,1,-3).}$

Le vecteur $(9,1,-3)$ est alors une base de $F \cap G$ et $\boxed{\dim(F \cap G) = 1.}$

On pouvait prévoir ce résultat en utilisant la formule de Grassmann qui donne

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 2 + 2 - \dim(\mathbb{R}^3) = 1.$$

(b) Montrons que $((9,1,-3),(3,2,0))$ est une base de F.

Tout d'abord, $(9,1,-3) \in F \cap G \subset F$ et $(3,2,0) \in F$ comme vu à la première question de cette partie.

La famille est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est une famille libre à deux éléments de F qui est de dimension 2 donc $\boxed{((9,1,-3),(3,2,0))\text{ est une base de }F.}$

D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver un troisième vecteur pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

On sait que $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$ d'après la question 3.(b) de la partie II.

Puisque $((9,1,-3),(3,2,0))$ est une base de F et que $(2,-3,5)$ est une base de $F^{\perp}$, on en déduit grâce à la question 3.(a) de la Partie II que $((9,1,-3),(3,2,0),(2,-3,5))$ est une base de $F \oplus F^{\perp}$ donc

$$\boxed{((9,1,-3),(3,2,0),(2,-3,5))\text{ est une base de }\mathbb{R}^3.}$$