Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°8
Samedi 10 mai 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, d'un problème et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Informatique

On utilise la bibliothèque `numpy`, qu'on suppose importée avec la commande `import numpy as np`.
On rappelle que pour définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, il suffit d'écrire

```
A=np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]).
```

On rappelle que les commandes `np.shape(M)[0]` et `np.shape(M)[1]` renvoient respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de A.
Enfin, on rappelle que pour créer une matrice remplie de zéros de taille (n, p), il suffit d'écrire `np.zeros((n,p))`.

1. Ecrire une fonction `transposee` qui prend en argument une matrice `M` et qui renvoie la transposée de celle-ci.

   Par exemple, `transposee(A)` devra renvoyer

   ```
   array([[1., 4., 7.],
          [2., 5., 8.],
          [3., 6., 9.]])
   ```

2. Ecrire une fonction `miroir` qui prend en argument une matrice `M` et qui renvoie la matrice obtenue à partir de `M` en échangeant les colonnes de la manière suivante : la première colonne et la dernière sont échangées, la deuxième et l'avant-dernière sont échangées, et ainsi de suite.

   Par exemple, `miroir(A)` devra renvoyer

   ```
   array([[3., 2., 1.],
          [6., 5., 4.],
          [9., 8., 7.]])
   ```

3. Ecrire une fonction `moyenne_voisins(M,i,j)` qui prend en argument une matrice `M`, deux entiers `i` et `j`, et qui renvoie la moyenne des cœfficients voisins du cœfficient en ligne `i` et colonne `j` de la matrice `M`.

   Par exemple, dans la matrice A, les voisins du 5 sont tous les cœfficients de la matrice, les voisins du 1 sont $1, 2, 4, 5$ et 7, les voisins du 6 sont $2, 3, 5, 6, 8, 9$, etc...

4. Ecrire une fonction `supprime(M,i,j)` qui prend en argument une matrice `M`, deux entiers `i` et `j`, et qui renvoie la matrice obtenue après avoir supprimé la ligne numéro `i` et la colonne numéro `j` de la matrice `M` (on rappelle que la première ligne est la ligne numéro 0).

   Par exemple, `supprime(A,1,2)` devra renvoyer

   ```
   array([[1., 2.],
          [7., 8.]])
   ```

Exercice 2 : Espaces vectoriels matriciels

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère les ensembles

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | AM = MA = M\} \quad \text{et} \quad F_A = \{\lambda I_3 + \mu A, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Rappeler les dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
3. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. On suppose dans cette question que A n'est pas une matrice diagonale et que $A^2 = I_3$.
   (a) Montrer qu'aucune matrice de C_A n'est inversible.
   (b) Donner une base de $C_A \cap F_A$.
   (c) On note $J = A - I_3$. Déterminer des réels a, b, c tels que $aJ^2 + bJ + cI_3 = 0$.
   (d) La matrice J est-elle inversible ?

Dans toute la suite, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Déterminer une base de F_A.
6. Déterminer une base de C_A.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$.
8. Soit $A_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = X\}$. Montrer que A_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 2. Trouver $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ t \end{pmatrix}$ forment une base de A_1.
9. Soit $A_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = -X\}$. Montrer que A_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1. Trouver $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}$ forme une base de $A_{-1.}$
10. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & z & u \\ y & t & v \end{pmatrix}$.
    Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale à détemriner.

Problème : Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Dans la première partie du problème, on se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
A partir de la Partie II, on considère $E = \mathbb{R}^3$.
Les deux premières parties établissent des résultats qui pourront être utilisés librement dans la partie III.

Partie I : Sommes de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$.
On définit l'ensemble

$$F + G = \{u + v | (u, v) \in F \times G\}$$

appelé **somme de F et G** constitué des sommes de vecteurs de F et de G.
On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont en **somme directe** si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, l'ensemble $F + G$ se note $F \oplus G$.
On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires dans E** s'ils sont en somme directe et si $E = F \oplus G$. On dit également que G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

1. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G.
2. (a) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   i. F et G sont en somme directe.
   ii. Pour tout $(u, v) \in F \times G$, si $u + v = 0_E$, alors $u = v = 0_E$.

   (b) En déduire que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   i. F et G sont en somme directe.
   ii. Pour tout $x \in F + G$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
3. **On suppose dans cette question uniquement que F et G sont en somme directe.**
   On considère des bases $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ de F et G respectivement.
   (a) Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$.
   (b) En déduire que $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
4. (a) Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Justifier par un théorème du cours qu'il existe des vecteurs $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de E tels que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.
   (b) Soit $H = \mathrm{Vect}(f_{p+1}, \ldots, f_n)$.
   Montrer que $F \oplus H = E$.

   On pourra dorénavant utiliser librement le fait que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel admet un supplémentaire dans cet espace vectoriel.
5. Soit H un sous-espace vectoriel de G tel que $(F \cap G) \oplus H = G$, i.e. les sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et H sont supplémentaires dans G.
   (a) Montrer que $F \oplus H = F + G$.
   (b) En déduire que $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$. Cette formule s'appelle la formule de Grassmann.

Partie II : Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le produit scalaire $u \cdot v$ par

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'.$$

Les vecteurs u et v sont dits **orthogonaux** si $u \cdot v = 0$.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On définit l'**orthogonal de** F par

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 | \forall v \in F, u \cdot v = 0\}.$$

1. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Expliciter les ensembles $\{(0,0,0)\}^\perp$ et $(\mathbb{R}^3)^\perp$.
   (b) Si $F = \text{Vect}(u)$ où $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, montrer que $F^\perp$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$.
   (c) Si $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (a,b,c)$ et $v = (a', b', c')$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, montrer que $F^\perp$ est la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{cases}.$$

3. (a) Déduire des questions précédentes que pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$,

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = 3.$$

   (b) En conclure que pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$.
4. (a) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.
   (b) En déduire par un argument de dimension que $F = (F^\perp)^\perp$.
5. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Si $F \subset G$, montrer que $G^\perp \subset F^\perp$.
   (b) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (c) En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Partie III : Etude d'un exemple

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - 3y + 5z = 0$.
Soit G le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x + 3z = 0$.

1. (a) Donner une base de F et calculer sa dimension.
   (b) Décrire l'espace $F^\perp$, puis en donner une base et sa dimension.
2. (a) Donner une base de G et calculer sa dimension.
   (b) Décrire l'espace $G^\perp$, puis en donner une base et sa dimension.
3. (a) Déterminer l'espace $F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$. La somme $F + G$ est-elle directe ?
   (c) En utilisant les bases de F et de G données précédemment, exhiber une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ puis en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.
4. (a) Donner une base de $F \cap G$ et calculer sa dimension. Pouvait-on calculer cette dimension a priori ?
   (b) Compléter cette base de $F \cap G$ en une base de F, puis en une base de $\mathbb{R}^3$.