

---

DEVOIR MAISON N°15  
A RENDRE POUR LE MERCREDI 28 MAI 2025

---

## Problème : Projecteurs et symétries

Dans tout le problème,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Dans la partie II uniquement,  $E = \mathbb{R}^3$ .  
On dit qu'un endomorphisme  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un **projecteur** si  $p \circ p = p$ .  
On dit qu'un endomorphisme  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une **symétrie** si  $s \circ s = \text{Id}_E$ .  
Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , on dit que  $F$  est stable par  $f$  si  $f(F) \subset F$ , i.e. si pour tout  $x \in F$ , alors  $f(x) \in F$ .

### Partie I : Généralités

Dans toute cette partie, on considère  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

On note  $F = \{x \in E | p(x) = x\}$  et  $G = \{x \in E | p(x) = 0_E\}$ .

- (a) Montrer que  $F = \text{Im}(p)$ . Que représente  $G$  pour l'application linéaire  $p$ ?  
(b) En déduire que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
(c) Vérifier que  $F \cap G = \{0_E\}$ .  
(d) Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(x_F, x_G) \in F \times G$  tel que  $x = x_F + x_G$ , puis exprimer  $p(x)$  en fonction de  $x_F$  et de  $x_G$ .

*Indication : on pourra raisonner par analyse-synthèse.*

On considère  $s \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $s = 2p - \text{Id}_E$ .

- (a) Etablir que  $s$  est une symétrie.  
(b) Montrer que  $F = \{x \in E | s(x) = x\}$  et  $G = \{x \in E | s(x) = -x\}$ .  
(c) Soit  $x \in E$ , tel que  $x = x_F + x_G$  où  $(x_F, x_G) \in F \times G$ . Montrer que  $s(x) = x_F - x_G$ .  
(d) En déduire que  $s$  est un automorphisme.
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $p \circ f = f \circ p$  si et seulement si  $F$  et  $G$  sont stables par  $f$ .

On considère  $q \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur tel que  $p \circ q = q \circ p$ .

- (a) Vérifier que  $p \circ q$  est un projecteur.  
(b) Montrer que  $\text{Im}(p \circ q) = F \cap \text{Im}(q)$ .
- Montrer les équivalences suivantes :
  - $F \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = 0$ ;
  - $G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = q$ ;
  - $F \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p$ ;
  - $G \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p + q - \text{Id}_E$ .

### Partie II : Projecteurs et symétries dans l'espace

Dans toute cette partie,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .

On considère l'application

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-4x - 5y, 4x + 5y, -x - y + z). \end{array}$$

1. Vérifier que  $p$  est une application linéaire et écrire sa matrice, notée  $A$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Calculer  $A^2$  et en déduire que  $p$  est un projecteur.
3. (a) Montrer que  $\dim(\operatorname{Im}(p)) = 2$  et exhiber deux vecteurs  $u = (x_1, y_1, z_1)$  et  $v = (x_2, y_2, z_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que la famille  $(u, v)$  forme une base de  $\operatorname{Im}(p)$ . L'application  $p$  est-elle surjective ?  
 (b) Donner une équation cartésienne du plan vectoriel  $\operatorname{Im}(p)$ .
4. (a) Montrer que  $\dim(\ker(p)) = 1$  et exhiber un vecteur  $w = (x_3, y_3, z_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\ker(p) = \operatorname{Vect}(w)$ . L'application  $p$  est-elle injective ?  
 (b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle  $\ker(p)$ .
5. (a) Prouver que la famille  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Montrer que la matrice de l'application linéaire  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(c) Soit  $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ .

Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

(d) Vérifier que  $PDP^{-1} = A$ .

Soit  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $s = 2p - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

6. (a) Expliciter  $s(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et écrire sa matrice, notée  $B$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (b) Calculer  $B^2$  et justifier que  $s$  est bien une symétrie.
7. (a) Montrer que la matrice de l'application linéaire  $s$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 (b) Vérifier que  $P\Delta P^{-1} = B$ .