Programme de colles 27 **Semaine du 19/05**

Questions de cours

Espaces vectoriels

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

Applications linéaires

1. Composition d'applications linéaires.
2. Bijection réciproque d'un isomorphisme.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F), \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espac vectoriel de F.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F.
7. Il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
8. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur.
9. Matrice d'une composée d'applications linéaires.
10. Matrice d'un isomorphisme.
11. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercices

Espaces vectoriels

Détermination de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés. Familles libres, familles génératrices. Bases, coordonnées dans une base. Dimension d'un espace vectoriel.

Applications linéaires

Déterminer si une application est linéaire ou non. Isomorphismes. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases (calcul matriciel de l'image d'un vecteur, matrice d'une composée d'applications linéaires, d'un isomorphisme...).
Théorème du rang et conséqunences sur les applications linéaires injectives/surjectives/bijectives.