

4 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

Plan du chapitre

1	Systèmes oscillants en régime libre	2
1.1	Exemple du ressort	2
1.2	Exemple du pendule	3
1.3	Équation différentielle du mouvement	5
2	Mouvement d'un oscillateur harmonique	5
2.1	Résolution de l'équation différentielle	5
2.2	Analyse du mouvement	6
	Exercices	7
	Travaux dirigés	9

Programme officiel – Premier semestre – **Thème M – mouvements et interactions**

NOTIONS	CAPACITÉS EXIGIBLES
M.2.2. Lois de Newton Exemple d'oscillateur harmonique : système masse - ressort en régime libre. Pulsation et période propre.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propre du mouvement.

1 Systèmes oscillants en régime libre

1.1 Exemple du ressort

Système étudié :

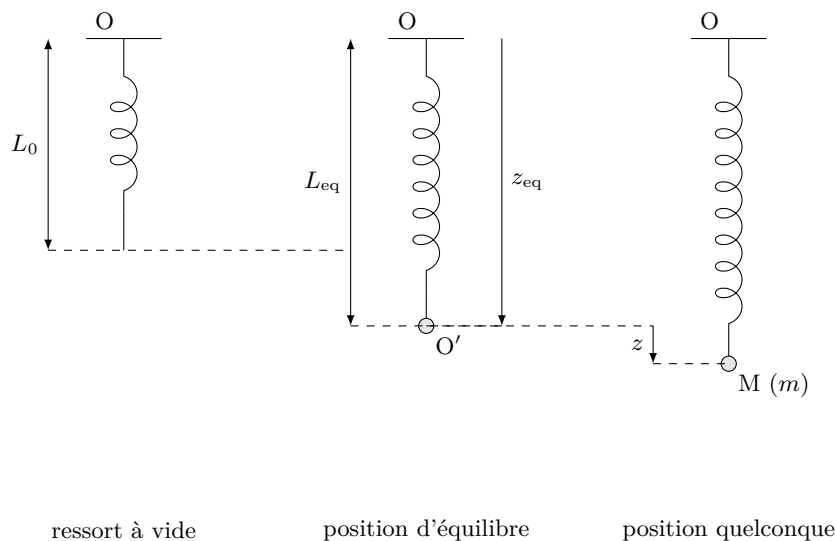
- une masse m ,
- fixée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k ,
- dont l'extrémité supérieure est accrochée à un point fixe.

1.1.1 Équilibre du système

- Choix du système ?
- Choix du référentiel ?
- Choix du repère ?

Position d'équilibre

Déterminer la position de m à l'équilibre.



1.1.2 Mouvement autour de la position d'équilibre

On écarte verticalement la masse m de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de m ?

Régime libre

On parle de régime libre lorsqu'on laisse évoluer un système sans imposer de contrainte à son mouvement.

Régime forcé

Le régime est forcé lorsque l'expérimentateur impose l'évolution du système par une contrainte extérieure.

Repère adapté au problème

Il est toujours plus simple d'étudier un mouvement au voisinage de la position d'équilibre en choisissant cette position comme origine du repère.

Problème à un paramètre

La position à une date donnée est entièrement déterminée par la connaissance d'un seul paramètre.

Étude cinématique

Établissement de l'équation du mouvement

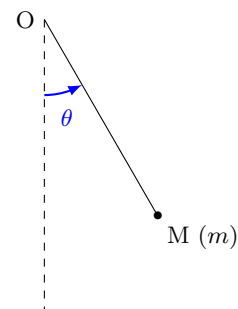
1.2 Exemple du pendule

Système étudié :

- une masse m ,
- fixée à l'extrémité inférieure d'un fil flexible,
- dont l'extrémité supérieure est accrochée à un point fixe.

1.2.1 Équilibre du système

- Choix du système ?
- Choix du référentiel ?
- Choix du repère ?



Position d'équilibre

Déterminer la position de m à l'équilibre.

1.2.2 Mouvement autour de la position d'équilibre

On écarte verticalement la masse m de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de m en régime libre ?

Étude cinématique

Établissement de l'équation du mouvement

Approximation des petits angles

1.3 Équation différentielle du mouvement

Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

On appelle **oscillateur harmonique à une dimension** un système à un seul paramètre s dont l'évolution temporelle vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

où le facteur devant s est positif, et peut donc toujours être écrit sous forme d'un carré.

Cas du ressort

Pour le ressort : $\omega_0 =$

Analyse dimensionnelle ?

Cas du pendule pour les petits angles

Pour le pendule : $\omega_0 =$

Analyse dimensionnelle ?

L'oscillateur harmonique est un modèle d'une très grande généralité en physique et qu'on retrouve en mécanique, en électricité, en optique, en électromagnétisme et en physique quantique.

2 Mouvement d'un oscillateur harmonique

2.1 Résolution de l'équation différentielle

Solution de l'équation différentielle

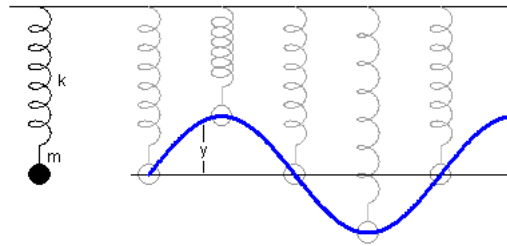
La solution de l'équation différentielle $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$ peut s'écrire de deux façons équivalentes :

$$s(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \text{ou} \quad s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Constantes d'intégration

Il apparaît deux constantes d'intégration (A et B ou S_0 et φ), qui s'obtiennent à l'aide des conditions initiales.

Exemple : pour le système masse - ressort, on écarte la masse m de sa position d'équilibre d'une distance $Z_0 > 0$ et on la lâche sans vitesse initiale.



Source : <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1121702>

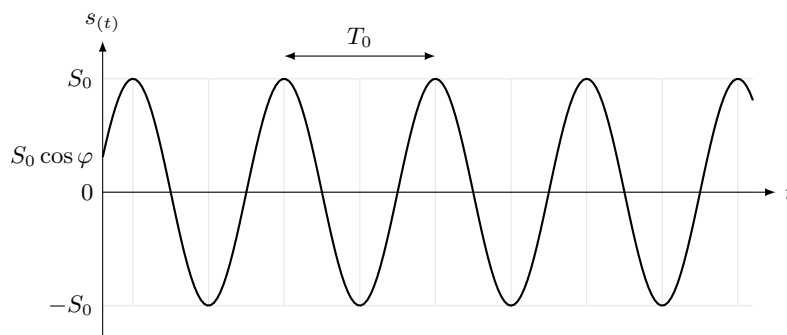
2.2 Analyse du mouvement

Caractéristique du mouvement

Le mouvement est oscillatoire : le paramètre du problème suit une loi sinusoïdale :

- son amplitude est S_0 ,
- sa **pulsation propre** vaut ω_0 ,
- sa **période propre** T_0 et sa **fréquence propre** f_0 sont telles que :

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



Paramètres dont dépend la pulsation propre

En régime libre, la pulsation propre ω_0 ne dépend que de caractéristiques intrinsèques au système (g et L pour le pendule, k et m pour le ressort). Elle est indépendante de l'écartement initial par rapport à la position d'équilibre.

Évolution de la vitesse du système

$$s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{s} = \frac{ds}{dt} = -S_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = S_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$$

Conséquence

La position et la vitesse sont en quadrature de phase :

- lorsque l'amplitude est maximale, la vitesse est nulle.
- lorsque l'amplitude est nulle, la vitesse est maximale.

Exercices

Exercice 1 : oscillations d'un système masse-ressort

Un solide ponctuel de masse $m = 200 \text{ g}$ est suspendu à un ressort vertical de masse négligeable, parfaitement élastique. Après immobilisation, le ressort s'est allongé de 8 cm . Le solide est ensuite tiré verticalement vers le bas de 4 cm à partir de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale. Le champ de pesanteur terrestre vaut : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Évaluer la constante de raideur du ressort en fonction de l'allongement à l'équilibre. Calculer sa valeur.
2. Établir l'équation horaire du mouvement en prenant comme origine la position d'équilibre S et en orientant l'axe vertical vers le bas.
3. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps. Quelle est sa valeur maximale ?

Exercice 2 : étude des oscillations de deux ressorts couplés

On considère un ressort de longueur à vide L_{10} et de constante de raideur k_1 , suspendu verticalement. Une masse m est accrochée à son extrémité inférieure. Écartée de sa position d'équilibre, elle oscille avec une période propre T_1 . On dispose d'un second ressort, de longueur à vide L_{20} et de constante de raideur k_2 . Dans les mêmes conditions expérimentales, la masse oscille avec une période propre T_2 .

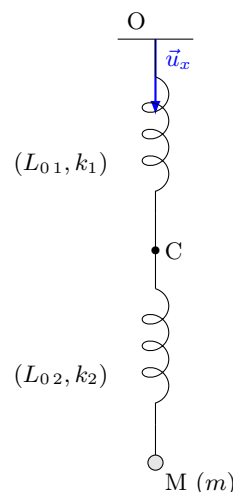
1. Déterminer T_1 et T_2 .

On accroche maintenant le deuxième ressort à l'extrémité du premier. La masse m est suspendue à l'extrémité inférieure de l'ensemble. Soit C le point d'accrochage des deux ressorts. On appelle $L_{1\text{eq}}$ et $L_{2\text{eq}}$ les longueurs des ressorts à l'équilibre.

2. Écrire les conditions d'équilibre du point C et de la masse m .

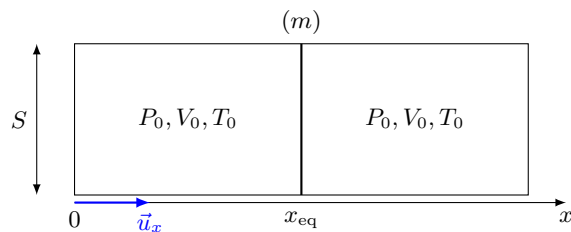
La masse m est écartée de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale. Soit x_1 et x_2 les allongements algébriques des ressorts par rapport à leurs longueurs à l'équilibre à un instant quelconque, et x l'allongement total des deux ressorts par rapport à leur longueur totale à l'équilibre.

3. En écrivant le principe fondamental de la dynamique au point C, déterminer une relation entre x_1 et x_2 .
4. En écrivant le principe fondamental de la dynamique au point M, déterminer une relation entre l'allongement x_2 et l'écartement x de la masse m par rapport à sa position d'équilibre.
5. En déduire une équation différentielle en x_2 , puis une équation différentielle en x_1 .
6. À l'aide des deux relations précédentes, établir l'équation différentielle vérifiée par x .
7. Exprimer la période propre T_0 des oscillations en fonction de T_1 et T_2 .



Exercice 3 : vibration d'un piston

Un cylindre horizontal, de section S , est séparé en deux parties de même volume V_0 par un piston de masse m mobile sans frottement le long de l'axe horizontal. Les deux compartiments sont remplis d'un même gaz parfait à la pression P_0 et à la température T_0 . La position du piston est repérée par son abscisse x comptée à partir de l'extrémité gauche du cylindre. Le système est initialement au repos. On écarte le piston de sa position d'équilibre x_{eq} , et on le lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. L'évolution ultérieure se fait dans des conditions isothermes.



1. Si le piston se trouve à l'abscisse x , déterminer les volumes des compartiments en fonction de V_0 et de $X = x - x_{\text{eq}}$.
2. Déterminer la pression dans chaque compartiment en fonction de X . En déduire la force pressante qui s'exerce sur chaque côté du piston.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par X .
4. Montrer que, dans le cas où X reste petit, cette équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique à une dimension. On utilisera le développement limité $1/(1 + \epsilon)^n \approx 1 - n\epsilon$ pour $\epsilon \ll 1$.
5. Quelle est la période des petites oscillations du piston ?

Exercice 4 : cas d'un système non oscillant

On considère un système de masse m , dépendant d'un seul paramètre x et vérifiant l'équation différentielle suivante, dans laquelle $k > 0$:

$$\ddot{x} - \frac{k}{m} \times x = 0$$

1. Vérifier que les solutions sont de la forme ci-dessous, dans laquelle on explicitera ω :

$$x = A \exp\{\omega t\} + B \exp\{-\omega t\}$$

2. Déterminer A et B si les conditions initiales ($t = 0$) sont : $x_0 = X$ et $\dot{x}_0 = 0$.
3. Quel est le mouvement du système ? En supposant que la position initiale soit une position d'équilibre, comment la qualifier ?

Exercice 5 : système de deux masses reliées par un ressort

On considère deux solides ponctuels de même masse $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$ accrochées à chaque extrémité d'un ressort de longueur à vide $L_0 = 10 \text{ cm}$ et de constante de raideur $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On comprime le ressort jusqu'à $L_1 = 8 \text{ cm}$ et on lâche sans vitesse initiale. Le ressort est horizontal, et les masses glissent sur un plan horizontal sans aucun frottement.

Montrer que le système est un oscillateur harmonique et déterminer sa période propre d'oscillation. Indice 1¹. Indice 2².

1. Utiliser la symétrie du problème pour ne définir qu'une seule variable.
2. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide.

Travaux dirigés

Exercice 1 : oscillations d'un wagonnet accroché à un ou deux ressorts

On considère un wagonnet de masse $m = 1,00 \text{ kg}$, qui peut rouler sans frottement sur un support horizontal. Il est lié à un support par un ressort de longueur à vide $L_0 = 1 \text{ m}$ et de constante de raideur $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On comprime le ressort de $X_0 = 5,0 \text{ cm}$, et on lâche le wagonnet sans vitesse initiale à la date $t = 0$. On choisit l'origine du repère au niveau du wagonnet (assimilé à son centre de gravité) dans sa position d'équilibre (figure 1).

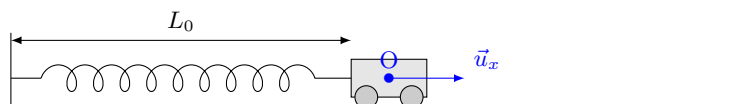


FIGURE 1 – Système à un ressort dans la position d'équilibre.

1. Justifier succinctement qu'on peut faire une étude du mouvement uniquement suivant l'axe $\vec{u}_x$.
2. Relier la longueur du ressort L à sa longueur à vide L_0 et l'abscisse x du wagonnet (on rappelle que l'abscisse est une grandeur algébrique). Il est conseillé de faire un dessin où ces grandeurs apparaissent.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par x . En déduire la pulsation propre et la période du mouvement.
4. Déterminer la position du wagonnet au bout de $0,200 \text{ s}$, ainsi que sa vitesse à cette date.

On considère maintenant le dispositif de la figure 2, dans lequel les deux ressorts sont identiques, de longueur à vide $L_0 = 1 \text{ m}$ et de constante de raideur $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Au repos, les deux ressorts sont à leur longueur à vide. On comprime le ressort de gauche de $5,0 \text{ cm}$, et on lâche le wagonnet sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

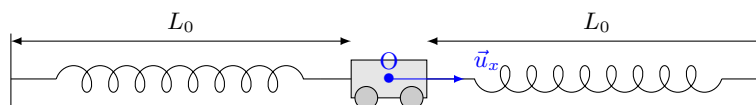
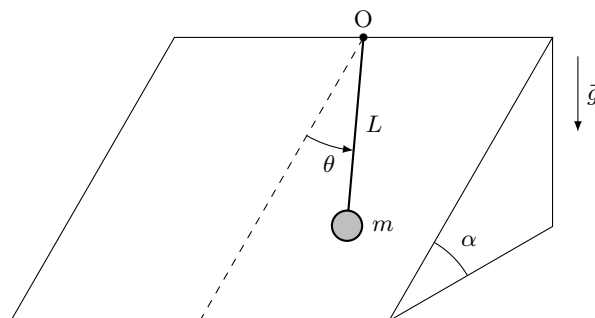


FIGURE 2 – Système à deux ressorts dans la position d'équilibre.

5. En raisonnant sur les forces subies par le wagonnet à une position quelconque, montrer que tout se passe comme s'il n'y avait qu'un seul ressort dont on déterminera la constante de raideur équivalente k_{eq} .
6. En déduire sans calcul la période propre des oscillations. Où le wagonnet se trouve-t-il après $0,11 \text{ s}$?

Exercice 2 : oscillations sur un plan incliné (oral Agro-Véto 2007)

Un pendule simple est constitué d'un fil sans masse de longueur L dont une extrémité O est fixée sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. À l'autre extrémité du fil, qui reste constamment tendu, est fixée une masse m en contact sans frottement avec le plan incliné. La position du pendule est repérée par l'angle θ qu'il fait avec la ligne de plus grande pente.

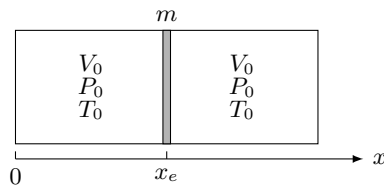


1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m . Déterminer l'expression de la composante du poids dans le plan du mouvement.
2. Établir l'équation différentielle reliant fonction de m , g , L , α , θ et $d\theta/dt$.
3. Exprimer la période des oscillations dans le cas où θ reste petit. Analyser les situations limites pour les valeurs extrêmes de α .

Exercice 3 : oscillations d'un piston

Un cylindre horizontal, de section S , est séparé en deux parties de même volume V_0 par un piston de masse m mobile le long de l'axe horizontal. Les deux compartiments sont remplis d'un même gaz parfait à la pression P_0 et à la température T_0 . Le système est initialement au repos.

On écarte le piston de sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$. L'évolution ultérieure se fait dans des conditions adiabatiques réversibles, c'est-à-dire telle que la loi de Laplace soit vérifiée : $P \times V^\gamma = \text{cte}$, avec γ un coefficient caractéristique du gaz.



1. Si le piston se trouve à l'abscisse x , déterminer les volumes des compartiments en fonction de V_0 et de $X = x - x_e$.
2. En utilisant la loi de Laplace, déterminer la pression dans chaque compartiment en fonction de X .
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position X du piston.
4. Montrer que, dans le cas où X reste petit, cette équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique à une dimension, et déterminer sa période. On rappelle que, si x est petit : $1/(1+x)^n \approx 1 - nx$.
5. En déduire comment on peut mesurer γ .