

Problème : Projecteurs et symétries

Partie I : Généralités

1. (a) Montrons que $\text{Im}(p) = F$ en procédant par double inclusion.

- Montrons que $F \subset \text{Im}(p)$.

Soit $x \in F$. Par définition on a $x = p(x)$. Or, $p(x) \in \text{Im}(p)$ donc $x \in \text{Im}(p)$ ce qui prouve l'inclusion $F \subset \text{Im}(p)$.

- Montrons que $\text{Im}(p) \subset F$.

Soit $y \in \text{Im}(p)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(x)$.

Or, puisque p est un projecteur, $p \circ p = p$ donc $y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y)$, ce qui prouve que $y \in F$.

On a bien l'inclusion $\text{Im}(p) \subset F$, et finalement on a l'égalité $F = \text{Im}(p)$.

Par ailleurs, par définition, $G = \ker(p)$.

(b) D'après le cours, puisque $p \in \mathcal{L}(E)$, $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

(c) • Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F \cap G$, ce qui prouve que $\{0_E\} \subset F \cap G$.

- Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in F \cap G$. Puisque $x \in F$, alors $x = p(x)$. Or, puisque $x \in G$, $p(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$, ce qui prouve que $F \cap G \subset \{0_E\}$ et finalement $F \cap G = \{0_E\}$.

(d) • **Analyse** : Supposons qu'il existe un couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Par linéarité de p , on a $p(x) = p(x_F) + p(x_G)$.

Puisque $x_F \in F$, $p(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, alors $p(x_G) = 0_E$ donc

$$p(x) = p(x_F) + p(x_G) = x_F.$$

Ainsi, on a nécessairement $x_F = p(x)$ puis $x_G = x - x_F = x - p(x)$.

- **Synthèse** : Posons $x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$. Vérifions que $(x_F, x_G) \in F \times G$ et que $x = x_F + x_G$.

On a $x_F = p(x) \in \text{Im}(p) = F$ d'après la question 1.a).

D'autre part, par linéarité de p , on a $p(x_G) = p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x)$.

Or, $p \circ p = p$ donc $p(x_G) = p(x) - p(x) = 0_E$, ce qui prouve que $x_G \in \ker(p) = G$.

Enfin, $x_F + x_G = p(x) + x - p(x) = x$.

Il existe donc bien un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$ et on a

$$p(x) = x_F \text{ et } x_G = x - p(x).$$

2. (a) Tout d'abord, l'application s est linéaire comme combinaison d'applications linéaires (puisque p et Id_E sont linéaire).

Montrons que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Par linéarité de s , on a pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} s \circ s(x) &= s(2p(x) - x) \\ &= 2s(p(x)) - s(x) = 2(2p(p(x)) - p(x)) - (2p(x) - x) \\ &= 4(p \circ p)(x) - 2p(x) - 2p(x) + x. \end{aligned}$$

Or, $p \circ p = p$ donc $s \circ s(x) = 4p(x) - 4p(x) + x = x$ et ce pour tout $x \in E$, donc $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}$, ce qui prouve que s est une symétrie.

(b) On a les équivalences suivantes :

$$x \in F \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow 2p(x) - x = x \Leftrightarrow s(x) = x$$

donc $F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$.

De même :

$$x \in G \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow 2p(x) - x = -x \Leftrightarrow s(x) = -x$$

donc $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

(c) Par linéarité de s , on a $s(x) = s(x_F) + s(x_G)$. Puisque $x_F \in F$, on a $s(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, on a $s(x_G) = -x_G$ donc $s(x) = x_F - x_G$.

(d) Il faut montrer que l'application linéaire s est bijective.

• Montrons que s est injective. Pour cela, montrons que $\ker(s) = \{0_E\}$.

On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(s)$. Montrons que $\ker(s) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(s)$, i.e. $s(x) = 0_E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

On a alors $0_E = s(x) = x_F - x_G$ d'où $x_F = x_G \in F \cap G$. Or, d'après la question 1.c), on sait que $F \cap G = \{0_E\}$ donc $x_F = x_G = 0_E$, d'où $x = x_F + x_G = 0_E$.

On a donc bien $\ker(s) = \{0_E\}$, ce qui prouve que s est injective.

• Montrons que s est surjective.

Soit $x \in E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

On a alors d'après la question précédente

$$s(x_F - x_G) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$$

donc tout vecteur x de E admet un antécédent par s , ce qui prouve que s est surjective.

Finalement, s est un endomorphisme de E bijectif, c'est à dire s est un automorphisme.

3. • Supposons que $p \circ f = f \circ p$.

Montrons que F est stable par f , c'est à dire montrons que pour tout $x \in F$, alors $f(x) \in F$.

Soit $x \in F$.

On a $p(f(x)) = f(p(x))$ puisque $p \circ f = f \circ p$. Or, $x \in F$ donc $p(x) = x$ d'où $p(f(x)) = f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in F$. On a donc bien montré que F est stable par f .

Montrons maintenant que G est stable par f , c'est à dire montrons que pour tout $x \in G$, alors $f(x) \in G$.

Soit $x \in G$. On a $p(f(x)) = f(p(x))$. Or, $p(x) = 0_E$ puisque $x \in G$ donc $p(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ puisque f est linéaire. Ainsi, $p(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in G$, ce qui prouve que G est stable par f .

• Réciproquement, supposons que F et G sont stables par f et montrons que $p \circ f = f \circ p$.

Soit $x \in E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Par linéarité de $f \circ p$, on a

$$(f \circ p)(x) = (f \circ p)(x_F + x_G) = (f \circ p)(x_F) + (f \circ p)(x_G) = f(p(x_F)) + f(p(x_G)).$$

Puisque $x_F \in F$, $p(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, alors $p(x_G) = 0_E$ donc $f(p(x_G)) = f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f .

On en déduit que $(f \circ p)(x) = f(p(x_F)) = f(x_F)$.

Par ailleurs, par linéarité de $p \circ f$, on a

$$(p \circ f)(x) = (p \circ f)(x_F + x_G) = (p \circ f)(x_F) + (p \circ f)(x_G) = p(f(x_F)) + p(f(x_G)).$$

Puisque F est stable par f , alors $f(x_F) \in F$ donc $p(f(x_F)) = f(x_F)$. De même, puisque G est stable par f , alors $f(x_G) \in G$ donc $p(f(x_G)) = 0_E$ d'où $(p \circ f)(x) = f(x_F)$.

On a donc bien $(f \circ p)(x) = (p \circ f)(x)$, et ce pour tout $x \in E$, donc $f \circ p = p \circ f$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{f \circ p = p \circ f \text{ si et seulement si } F \text{ et } G \text{ sont stables par } f.}$$

4. (a) Tout d'abord, puisque p et q sont des endomorphismes de E , par composition d'applications linéaires, on en déduit que $p \circ q$ est également un endomorphisme de E .

Enfin, en utilisant que $p \circ q = q \circ p$, on en déduit que

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q).$$

Or, p et q sont des projecteurs donc $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. Ainsi, on a bien $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$, ce qui prouve que $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur.}}$

- (b) • Montrons que $\text{Im}(p \circ q) \subset F \cap \text{Im}(q)$.

Soit $y \in \text{Im}(p \circ q)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x) = p(q(x)) \in \text{Im}(p) = F$.

Par ailleurs, puisque $p \circ q = q \circ p$, on a $y = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x)) \in \text{Im}(q)$ donc $y \in F \cap \text{Im}(q)$, ce qui prouve l'inclusion $\text{Im}(p \circ q) \subset F \cap \text{Im}(q)$.

• Montrons que $F \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p \circ q)$.

Puisque q et $p \circ q$ sont des projecteurs, on peut montrer de manière analogue à la question 1.a) que $\text{Im}(q) = \{x \in E \mid q(x) = x\}$ et $\text{Im}(p \circ q) = \{x \in E \mid (p \circ q)(x) = x\}$.

Considérons alors $x \in F \cap \text{Im}(q)$.

On a $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(x)$ car $q(x) = x$ puisque $x \in \text{Im}(q)$. De même, puisque $x \in F$, alors $p(x) = x$ donc $(p \circ q)(x) = x$, ce qui prouve que $x \in \text{Im}(p \circ q)$, d'où l'inclusion $F \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p \circ q)$.

On a donc bien montré l'égalité $\boxed{\text{Im}(p \circ q) = F \cap \text{Im}(q).}$

5. (a) D'après la question précédente, on a les équivalences $F \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Im}(p \circ q) = \{0_E\}$.

Or, $\text{Im}(p \circ q) = \{0_E\} \Leftrightarrow \forall x \in E, (p \circ q)(x) = 0_E \Leftrightarrow p \circ q = 0$.

On a donc bien $\boxed{F \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = 0.}$

- (b) • Supposons que $G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$, i.e. $\ker(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$. Montrons que $p \circ q = q$.

Soit $x \in E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

On a alors $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(x_F) + (p \circ q)(x_G) = (q \circ p)(x_F) + (q \circ p)(x_G)$.

Or, $p(x_G) = 0_E$ car $x_G \in G = \ker(p)$ et $p(x_F) = x_F$ car $x_F \in F$ donc

$$(p \circ q)(x) = q(x_F) + q(0_E) = q(x_F)$$

car $q(0_E) = 0_E$ puisque q est linéaire.

Par ailleurs, $q(x) = q(x_F) + q(x_G)$.

Or, d'après la question 3, puisque $p \circ q = q \circ p$, G est stable par q donc $q(x_G) \in G$. Puisque $q(x_G) \in \text{Im}(q)$ par ailleurs, on a alors $q(x_G) \in G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$ par hypothèse, donc $q(x_G) = 0_E$.

On en déduit que $q(x) = q(x_F) = (p \circ q)(x)$, et ce pour tout $x \in E$, ce qui prouve que $p \circ q = q$.

• Supposons que $p \circ q = q$ et montrons que $G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$.

Puisque G et $\text{Im}(q)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , $G \cap \text{Im}(q)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\{0_E\} \subset G \cap \text{Im}(q)$.

Montrons l'inclusion réciproque, i.e. montrons que $G \cap \text{Im}(q) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in G \cap \text{Im}(q)$. Par hypothèse, on a $(p \circ q)(x) = q(x)$ donc $p(q(x)) = q(x)$.

Puisque $x \in \text{Im}(q)$, alors $q(x) = x$ donc $p(x) = x$. Or, $x \in G = \ker(p)$ donc $p(x) = 0_E$, ce qui implique que $x = 0_E$ d'où l'inclusion $G \cap \text{Im}(q) \subset \{0_E\}$ et finalement l'égalité $G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$.

On a donc bien montré l'équivalence $G \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = q$.

(c) On vient de montrer que $\ker(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = q$.

En échangeant les rôles de p et q , on obtient $\ker(q) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\} \Leftrightarrow q \circ p = p$ et puisque $p \circ q = q \circ p$, on en déduit que $\ker(q) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p$ d'où

$F \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p$.

(d) • Supposons que $G \cap \ker(q) = \{0_E\}$, i.e. $\ker(p) \cap \ker(q) = \{0_E\}$.

Montrons que $p \circ q = p + q - \text{Id}_E$.

Soit $x \in E$. Posons $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

D'après le même calcul qu'en question 5.b), on a $(p \circ q)(x) = q(x_F)$.

Par ailleurs, on a

$$(p+q-\text{Id}_E)(x) = p(x) + q(x) - x = x_F + q(x_F) + q(x_G) - x_F - x_G = q(x_F) + q(x_G) - x_G.$$

Or, on a $q(q(x_G) - x_G) = (q \circ q)(x_G) - q(x_G) = q(x_G) - q(x_G) = 0_E$ donc $q(x_G) - x_G \in \ker(q)$.

Par ailleurs, $p(q(x_G) - x_G) = p(q(x_G)) - p(x_G) = q(p(x_G)) = 0_E$ car $x_G \in \ker(p)$ donc $q(x_G) - x_G \in \ker(p) \cap \ker(q) = \{0_E\}$ par hypothèse.

Ainsi, on a bien $(p + q - \text{Id}_E)(x) = q(x_F) = (p \circ q)(x)$ et ce pour tout $x \in E$, donc $p \circ q = p + q - \text{Id}_E$.

• Supposons que $p \circ q = p + q - \text{Id}_E$. Montrons que $\ker(p) \cap \ker(q) = \{0_E\}$.

On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(p) \cap \ker(q)$. Montrons que $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. On a alors $p(x) = q(x) = (p \circ q)(x) = 0_E$ donc

$$(p \circ q)(x) = p(x) + q(x) - x \Leftrightarrow x = 0_E,$$

ce qui prouve finalement que $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \{0_E\}$ puis $\ker(p) \cap \ker(q) = \{0_E\}$.

On a donc bien montré que $G \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p + q - \text{Id}_E$.

Partie II : Projecteurs et symétries dans l'espace

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$p(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$\begin{aligned}
&= (-4(\lambda x + \mu x') - 5(\lambda y + \mu y'), 4(\lambda x + \mu x') + 5(\lambda y + \mu y'), -(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\
&= \lambda(-4x - 5y, 4x + 5y, -x - y + z) + \mu(-4x' - 5y', 4x' + 5y', -x' - y' + z') \\
&= \lambda p(x, y, z) + \mu p(x', y', z') = \lambda p(u) + \mu p(v),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que p est linéaire.

On a $p(1, 0, 0) = (-4, 4, -1)$, $p(0, 1, 0) = (-5, 5, -1)$ et $p(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ donc la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Or, puisque A est la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , A^2 est la matrice de $p^2 = p \circ p$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Puisque $p \circ p$ et p ont la même matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , $p \circ p = p$ donc p est un projecteur.

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
\text{Im}(p) &= \{(-4x - 5y, 4x + 5y, -x - y + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{x(-4, 4, -1) + y(-5, 5, -1) + z(0, 0, 1) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \text{Vect}\{(-4, 4, -1), (-5, 5, -1), (0, 0, 1)\}.
\end{aligned}$$

La famille $((-4, 4, -1), (-5, 5, -1), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(p)$ mais elle n'est pas libre puisque $(0, 0, 1) = -5(-4, 4, -1) + 4(-5, 5, -1)$.

On extrait de cette famille génératrice la plus grande famille libre possible, par exemple (u, v) où $u = (-4, 4, -1)$ et $v = (0, 0, 1)$. C'est bien une famille libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\text{Im}(p)$ constituée de deux vecteurs, ce qui prouve que $\dim(\text{Im}(p)) = 2$.

Puisque $\dim(\text{Im}(p)) = 2$, a fortiori $\text{Im}(p) \neq \mathbb{R}^3$ donc l'application p n'est pas surjective.

(b) On a $\text{Im}(p) = \text{Vect}\{(-4, 4, -1), (0, 0, 1)\}$ donc $\text{Im}(p)$ est le plan de base (u, v) . Pour trouver une équation cartésienne de ce plan, il faut trouver un vecteur normal $n(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $n \cdot u = 0$ et $n \cdot v = 0$. Le vecteur $n = (1, 1, 0)$ convient et puisque le plan $\text{Im}(p)$ passe par le point $(0, 0, 0)$, une équation cartésienne de $\text{Im}(p)$ est

$$x + y = 0.$$

4. (a) On a

$$(x, y, z) \in \ker(p) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 5y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{5}x \\ -x + \frac{4}{5}x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{5}x \\ z = \frac{1}{5}x \end{cases}$$

donc $\ker(p) = \{(x, -\frac{4}{5}x, \frac{1}{5}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\frac{x}{5}(5, -4, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(5, -4, 1)\}$ donc $\dim(\ker(p)) = 1$. On pose $w = (5, -4, 1)$ et $\ker(p) = \text{Vect}(w)$.

On a $\ker(p) \neq \{0_E\}$ donc p n'est pas injective.

(b) Exhibons deux vecteurs non colinéaires orthogonaux à w .

Par exemple, posons $n_1 = (1, 0, -5)$ et $n_2 = (0, 1, 4)$.

Alors $n_1 \cdot w = n_2 \cdot w = 0$ et puisque la droite $\ker(p)$ contient le vecteur $(0, 0, 0)$, un système d'équations cartésiennes de $\ker(p)$ est

$$\boxed{\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}}$$

5. (a) Montrons que la famille (u, v, w) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$. On a alors

$$\begin{cases} -4\alpha + 5\gamma = 0 \\ 4\alpha - 4\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} \gamma = 0 \\ 4\alpha - 4\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

donc la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , qui est un espace de dimension 3, on en déduit que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

(b) Puisque $(u, v) \in (\text{Im}(p))^2$, d'après la question 1.a) de la partie I,

$$p(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w \quad \text{et} \quad p(v) = v = 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w.$$

Enfin, $w \in \ker(p)$ donc $p(w) = 0_E = 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w$.

Ainsi, la matrice de p dans la base \mathcal{B} est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que P est inversible en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow -4L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3, L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) On a

$$PDP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 & -20 & 0 \\ 16 & 20 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

donc
$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

6. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$s(x, y, z) = 2p(x, y, z) - (x, y, z) = (-8x - 10y, 8x + 10y, -2x - 2y + 2z) - (x, y, z)$$

donc

$$\text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s(x, y, z) = (-9x - 10y, 8x + 9y, -2x - 2y + z).$$

On a $s(1, 0, 0) = (-9, 8, -2)$, $s(0, 1, 0) = (-10, 9, -2)$ et $s(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ donc la

matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est
$$B = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a
$$B^2 = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, puisque B est la matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , B^2 est la matrice de $s^2 = s \circ s$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Puisque $s \circ s$ et $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ont la même matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc s est une symétrie.

7. (a) On a $(u, v) \in (\text{Im}(p))^2$.

Or, d'après la question 2.b) de la première partie, $\text{Im}(p) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ donc $s(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $s(v) = v = 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w$.

Toujours d'après la même question, on a $w \in \ker(p) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$ donc $s(w) = -w = 0 \times u + 0 \times v + (-1) \times w$.

On en déduit que la matrice de l'application linéaire s dans la base \mathcal{B} est
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P\Delta P^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -36 & -40 & 0 \\ 32 & 36 & 0 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc
$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B.$$