22

Polynômes réels

22.1 Définition et règles de calcul

22.1.1 Définition

Définition 1: Polynôme réel

• Un polynôme réel est une application $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Les réels $(a_0, \ldots, a_n)$ sont appelés les cœfficients du polynôme P.
On note également le polynôme P sous la forme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (ou $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$) et l'ensemble des polynômes réels se note $\mathbb{R}[X]$.
• Un polynôme de la forme $P(X) = a_n X^n$ est appelé un monôme.
• Un polynôme est dit constant s'il est de la forme $P(X) = a$, où $a \in \mathbb{R}$. En particulier, si $a = 0$, on dit que c'est le polynôme nul et on le note $0_{\mathbb{R}[X]}$.

Exemple 1. • Les fonctions affines $P : x \longmapsto ax + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont des polynômes réels.
• Les fonctions puissances entières $P : x \longmapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, étudiées dans le chapitre ≪ Fonctions réelles usuelles ≫sont des polynômes réels.

Proposition 1: Unicité de l'écriture du polynôme nul

Soit $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
P est le polynôme nul si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = 0$.

Démonstration. • Si pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = 0$, il est clair que P est le polynôme nul.
• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$\ll \text{ Si pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0, \text{ alors pour tout } k \in [\![0, n]\!], a_k = 0. \gg$$

Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Soient $(a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = 0$.

La fonction P est constante égale à 0 sur $\mathbb{R}$ donc P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = P'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!] (k+1)a_{k+1} = 0$ d'où pour tout $k \in [\![1, n+1]\!], a_k = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 = 0$, donc pour tout $k \in [\![0, n+1]\!], a_k = 0$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

Corollaire 1: Unicité de l'écriture des polynômes

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes réels où $(n, m) \in \mathbb{N}^2, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, (b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.
Alors $P = Q$ si et seulement si $n = m$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$.

Démonstration. • Si $n = m$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$, il est clair que $P = Q$.

• Supposons que $P = Q$. Montrons que $n = m$.

On a $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ et $Q(x) \underset{+\infty}{\sim} b_m x^m$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = Q(x)$, alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} Q(x)$ d'où $a_n x^n \underset{+\infty}{\sim} b_m x^m$ ce qui implique que $\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = 1$, et ceci n'est possible que si $n = m$.

Par ailleurs, puisque $P = Q$, alors $P - Q = 0$.

On a ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^x = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k = 0$.

D'après la proposition précédente, ceci implique que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k - b_k = 0$, i.e. pour tout $0 \leqslant k \leqslant n, a_k = b_k$.

■

Remarque 1. • L'écriture d'un polynôme est donc unique. En particulier, un polynôme est entièrement déterminé par la donnée de ses cœfficients.

• Ceci légitime les processus d'identification des cœfficients entre deux polynômes.

Par exemple, si pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 3x^4 - x^2 + 2x + 1$, on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_4 & = & 3 \\ a_3 & = & 0 \\ a_2 & = & -1 \\ a_1 & = & 2 \\ a_0 & = & 1 \end{array} \right. .$$

22.1.2 Degré d'un polynôme

Définition 2: Degré d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
On suppose que P n'est pas le polynôme nul, c'est à dire qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$, tel que $a_k \neq 0$.

Soit $d = \max\{k \in [\![0, n]\!], a_k \neq 0\}$, i.e. $d \in [\![0, n]\!]$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ (et pour tout $k \in [\![d+1, n]\!], a_k = 0$).
On dit que l'entier naturel d est le degré du polynôme P et on note

$$d = \deg(P).$$

Le cœfficient a_d est appelé le cœfficient dominant de P.

Remarque 2. • Cette définition est légitime par unicité de l'écriture d'un polynôme.

• Si $a_n \neq 0$, alors $\deg(P) = d = n$ et dans ce cas $[\![d+1, n]\!]$ est vide.

• Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$, ce qu'on note $\deg(0) = -\infty$.

• Concrètement, le degré d'un polynôme non nul est la plus grande puissance de X apparaissant dans le polynôme.

• Les polynômes constants non nuls sont de degré 0.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg(X^n) = n$.

• $\deg(2X^3 + X - 1) = 3$ et le cœfficient dominant de ce polynôme est 2.

22.1.3 Opérations sur les polynômes

Proposition 2: Opérations sur les polynômes

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes réels avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda P$ est un polynôme de degré $\deg(P)$ et on a
$$\lambda P(X) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k.$$
2. La somme $P + Q$ est un polynôme réel et son degré vérifie
$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$$
L'inégalité est une égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
3. Le produit PQ est un polynôme réel et on a
$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j \right) X^k.$$
En particulier, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. La composée $P \circ Q$ est un polynôme réel et si Q est non constant, son degré vérifie
$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q).$$

Remarque 3. • Si $\lambda = 0, \lambda P = 0$.
• Si $Q = 0$, alors $P + Q = P$ et $PQ = 0$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda P(x) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k x^k)$, avec $\lambda a_n \neq 0$, d'où le résultat.
2. • Supposons que $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Sans perte de généralité, on peut supposer (quitte à échanger P et Q) que $\deg(Q) < \deg(P)$, i.e. $m < n$.
On pose alors pour tout $k \in [\![m + 1, n]\!], b_k = 0$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k,$$
avec $a_n + b_n = a_n \neq 0$ donc $\deg(P + Q) = n = \deg(P) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
• Supposons que $\deg(P) = \deg(Q)$, i.e. $n = m$. On a comme précédemment pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(P + Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.$$

Ainsi, $\deg(P+Q)=n$ si $a_n+b_n\neq 0$ et $\deg(P+Q)<n$ si $a_n+b_n=0$ donc dans tous les cas, $\deg(P+Q)\leqslant n=\max(\deg(P),\deg(Q))$.

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$PQ(x)=P(x)Q(x)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}a_ib_j\right)x^k.$$

Pour $k=n+m$, on a $\displaystyle\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}a_ib_j=a_nb_m\neq 0$ donc $\deg(PQ)=n+m=\deg(P)+\deg(Q)$.

4. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$P\circ Q(x)=P(Q(x))=\sum_{k=0}^{n}a_kQ(x)^k=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\sum_{i=0}^{m}b_ix^i\right)^k=\sum_{k=0}^{n}a_k(b_m^kx^{km}+\cdots+b_0^k)$$

donc si $m\neq 0$, i.e. si Q n'est pas constant, on constate que le cœfficient dominant de $P\circ Q$ est $a_nb_m^n\neq 0$ et est situé devant x^{nm} d'où le résultat.

■

Remarque 4. • Si $\deg(P)=\deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P+Q)<\max(\deg(P),\deg(Q))$.

En effet, si $P=X+1$ et $Q=-X$, on a $\deg(P)=\deg(Q)=1$ donc $\max(\deg(P),\deg(Q))=1$ et $P+Q=1$ donc $\deg(P+Q)=0<\max(\deg(P),\deg(Q))$.

• Si Q est constant, on peut avoir $\deg(P\circ Q)\neq\deg(P)\deg(Q)$. Par exemple, si $P(X)=X-1$ et $Q(X)=1$, alors $P\circ Q(X)=0$ donc $\deg(P\circ Q)=-\infty$, tandis que $\deg(P)\deg(Q)=1\times 0=0$.

Exemple 3. • Soit $P=2X^3-X$ et $Q=3X^2+X+2$.

Alors

$$PQ=6X^5+2X^4+X^3-X^2-2X$$

et

$$Q\circ P=3(2X^3-X)^2+2X^3-X+2=12X^6-12X^4+2X^3+3X^2-X+2.$$

Proposition 3: Structure d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble $(\mathbb{R}[X],+,.)$ muni des lois

$$+:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\(P,Q)&\longmapsto&P+Q\end{array}\quad\text{et}\quad .:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\(\lambda,P)&\longmapsto&\lambda.P\end{array}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie).

Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]=\{P\in\mathbb{R}[X]|\deg(P)\leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes à cœfficents réels de degré inférieur ou égal à n.

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension $n+1$ dont la base canonique est $(1,X,X^2,\dots,X^n)$.

Démonstration. La structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ est claire.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

• Soit $0_{\mathbb{R}[X]}$ le polynôme nul. Alors $\deg(0_{\mathbb{R}[X]})=-\infty\leqslant n$ donc $0_{\mathbb{R}[X]}\in\mathbb{R}_n[X]$.

• Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, soient $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$.

Alors

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg(\lambda Q)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, $\mathbb{R}_n[X]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe une unique famille de scalaires $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ donc la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et puisqu'elle est constituée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, on en conclut que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$. ∎

Remarque 5. • Pour $n = 0, \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$ est l'ensemble des polynômes constants à cœfficients réels et est de dimension 1 sur $\mathbb{R}$.

• Soit $(P_0, \ldots, P_n) \in (\mathbb{R}_n[X])^{n+1}$ une famille de polynômes à degrés échelonnés, i.e. pour tout $k \in [\![0, n]\!], \deg(P_k) = k$.

Alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

En effet, montrons que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Puisque les degrés sont échelonnés, si $\lambda_n \neq 0$, le cœfficient dominant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ serait $\lambda_n a_n \neq 0$, où a_n est le cœfficient dominant de P_n. Ainsi, on aurait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, ce qui est absurde. Nécessairement, $\lambda_n = 0$, puis par une récurrence descendante, on montre successivement que $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$.

Ainsi, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre consituée de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n + 1$: c'en est donc une base.

Par exemple, $(2, X - 1, X^2 + 3X + 2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

22.1.4 Polynôme dérivé

Définition 3: Polynôme dérivé

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_n \neq 0$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

Remarque 6. • La fonction $P' : x \longmapsto P'(x)$ est la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $P : x \longmapsto P(x)$.

En effet, si pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

• Si $n = 0$, i.e. si P est constant, alors $P' = 0$ (en effet, la somme va de 0 à -1 et est donc vide).

• Le polynôme dérivé du polynômé nul est le polynôme nul.

Exemple 4. Si $P(X) = -2X^5 + X^3 + 3X^2 - 1$, alors $P'(X) = -10X^4 + 3X^2 + 6X$.

Proposition 4: Degré du polynôme dérivé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\deg(P') = n - 1$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ de telle sorte que $\deg(P) = n$.

Alors $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.

Le cœfficient dominant de P' est $na_n \neq 0$ et il est situé devant X^{n-1} donc

$$\deg(P') = n - 1 \in \mathbb{N}.$$

■

Remarque 7. Si $\deg(P) = 0$, alors $\deg(P') = -\infty$.

Proposition 5: Dérivée p-ème

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$, i.e. $\deg(P) = n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $P^{(p)}$ la dérivée p-ème de P.
Alors

$$P^{(p)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-p} \frac{(k+p)!}{k!} a_{k+p} X^k & \text{si}\, p \leqslant n \\ 0 & \text{si}\, p > n \end{cases}$$

En particulier, si $p \leqslant n, \deg(P^{(p)}) = n - p$.

Démonstration. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

On a vu dans le chapitre « Dérivation »que la dérivée p-ème de $x \longmapsto x^k$ était $x \longmapsto \frac{k!}{(k-p)!} x^{k-p}$ si $p \in [\![0, k]\!]$ et 0 sinon.

Par linéarité de la dérivation, on trouve que si $p \in [\![0, n]\!]$,

$$P^{(p)} = \sum_{k=p}^{n} a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} = \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(k+p)!}{k!} a_{k+p} X^k$$

et si $p > n, P^{(p)} = 0$. ■

22.2 Racines et factorisation

22.2.1 Racines réelles d'un polynôme

Définition 4: Racines réelles d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si

$$P(\alpha) = 0.$$

Exemple 5. • Le polynôme $P = X + 1$ admet comme unique racine réelle $\alpha = -1$.
• Le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ admet comme unique racine $\alpha = 1$.
• Le polynôme $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ admet comme racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$.
• Le polynôme $P = X^3 - 1$ admet comme unique racine réelle $\alpha = 1$.

Proposition 6

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair.
Alors P admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

On a $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

Puisque n est impair, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

• Si $a_n > 0$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$.

• Si $a_n < 0$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, la fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ et prend des valeurs positives et négatives.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe nécessairement un réel α tel que $P(\alpha) = 0$. ■

Remarque 8. Ce n'est plus nécessairement le cas pour les polynômes de degré pair puisque le polynôme $P = X^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle. En effet, pour tout réel $x, P(x) > 0$.

22.2.2 Factorisation

Lemme 1: Division euclidienne

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)Q + P(\alpha).$$

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de Q.
• Si P est un polynôme constant, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = P(\alpha)$ donc $Q = 0$ convient.
• Supposons que $\deg(P) = n \geqslant 1$. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ le résultat suivant :

$$\ll \text{ Si } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ alors il existe } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X - \alpha)Q + P(\alpha). \gg$$

- Si $n = 1$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = aX + b$.
On pose $Q = a$ et on obtient

$$a(X - \alpha) + P(\alpha) = aX - a\alpha + a\alpha + b = aX + b = P,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$ fixé tel que la propriété soit vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ avec $a_{n+1} \neq 0$ (sinon $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et la propriété est vérifiée pour P par hypothèse de récurrence). On a $\deg(P) = n + 1$.

Posons $R = P - a_{n+1}X^n(X-\alpha)$.
Alors

$$R = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - a_{n+1}X^{n+1} + \alpha a_{n+1}X^n = (a_n + \alpha a_{n+1})X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X].$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R = (X-\alpha)S + R(\alpha)$.
Or, $R(\alpha) = P(\alpha) - a_{n+1}\alpha^n(\alpha-\alpha) = P(\alpha)$ donc on obtient

$$P = R + a_{n+1}X^n(X-\alpha) = (X-\alpha)S + R(\alpha) + a_{n+1}X^n(X-\alpha) = (X-\alpha)(a_{n+1}X^n + S) + P(\alpha).$$

En posant $Q = a_{n+1}X^n + S$, on trouve que $P = (X-\alpha)Q + P(\alpha)$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q + P(\alpha)$.

• Montrons maintenant l'unicité de Q.
Supposons qu'il existe $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tels que

$$P = (X-\alpha)Q_1 + P(\alpha) = (X-\alpha)Q_2 + P(\alpha).$$

On a alors $(X-\alpha)(Q_1 - Q_2) = 0$.
Si $Q_1 - Q_2$ n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(Q_1 - Q2) \geqslant 0$ et il vient

$$-\infty = \deg(0) = \deg((X-\alpha)(Q_1-Q_2)) = \deg(X-\alpha) + \deg(Q_1-Q_2) \geqslant \deg(X-\alpha) = 1,$$

ce qui est absurde.

Nécessairement $Q_1 - Q_2 = 0$, i.e. $Q_1 = Q_2$, d'où l'unicité du polynôme Q. ■

Corollaire 2: Factorisation d'un polynôme admettant une racine

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Le nombre réel α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$.
En outre, le polynôme Q est unique s'il existe.

Démonstration. • S'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$, alors

$$P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0,$$

ce qui implique que α est racine de P.

• Réciproquement, supposons que α est racine de P, i.e. $P(\alpha) = 0$.
D'après le lemme précédent, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha)Q + P(\alpha) = (X-\alpha)Q.$$

■

Exemple 6. • $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$.
• $X^3 - X^2 - X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X+1)$.
•$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$.

Corollaire 3: Factorisation d'un polynôme admettant plusieurs racines

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant des racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots..(X-\alpha_p)Q.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha_1)Q_1.$$

Puisque α_2 est une racine de P, on a $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$.
Or, $\alpha_2 \neq \alpha_1$ donc $Q_1(\alpha_2) = 0$.
On en déduit qu'il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_1 = (X-\alpha_2)Q_2$ d'où $P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)Q_2$.
On en déduit que α_3 est une racine de Q_2 et ainsi de suite.
A la fin, on obtient bien un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots...(X - \alpha_p)Q.$$

■

Exemple 7. • $X^3 - X^2 - X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X + 1) = (X - 1)^2(X + 1)$.
•$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X^2 - 5X + 6) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

Corollaire 4: Nombre de racines d'un polynôme non nul

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre de racines de P est inférieur ou égal à n.

Démonstration. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des racines distinctes de P.
D'après le corollaire précédent, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots...(X - \alpha_p)Q.$$

Notons que Q ne peut pas être le polynôme nul, puisque P ne l'est pas, donc $\deg(Q) \geqslant 0$. En comparant les degrés, on a

$$n = \deg(P) = p + \deg(Q) \geqslant p,$$

d'où le résultat. ■

Remarque 9. • Le polynôme nul admet une infinité de racines. En fait, si on sait qu'un polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et qu'il admet un nombre de racines strictement supérieur à n, alors P est le polynôme nul.
• Un polynôme constant non nul n'admet pas de racines.

Exemple 8. • Le polynôme $P = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ est de degré 3 et admet pour unique racine réelle $\alpha = 1$ car le polynôme $Q = X^2 + X + 1$ n'admet pas de racine réelle.
• Le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ est de degré 3 et admet 3 racines réelles distinctes : $1, 2$ et 3.

Ainsi, un polynôme de degré n admet au maximum n racines réelles distinctes. S'il admet exactement n racines, on connaît sa factorisation :

Corollaire 5: Factorisation d'un polynôme admettant autant de racines que son degré

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P admet n racines réelles distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Alors

$$P = a_n(X - \alpha_1)\ldots(X - \alpha_n)$$

où a_n est le cœfficient dominant de P.

Démonstration. D'après le Corollaire 3, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)Q.$$

En comparant les degrés, on a $n = \deg(P) = n + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) = 0$, i.e. Q est un polynôme constant.

Notons $Q = a_n \in \mathbb{R}^*$.

Alors $P = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ et en développant, on remarque que a_n est le cœfficient devant X^n, donc a_n est bien le cœfficient dominant de P. ■

Remarque 10. On a déjà vu que pour un trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ de discrimant $\Delta > 0$ admettant deux racines réelle distinctes x_1 et x_2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 2)(x - 3)$.

22.2.3 Racines multiples

Définition 5: Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P.
On appelle ordre de multiplicité de la racine α le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \alpha)^m$ divise P, i.e. le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^m Q.$$

- Si $m = 1$, on dit que α est une racine simple de P.
- Si $m = 2$, on dit que α est une racine double de P.
- Si $m \geqslant 2$, on dit que α est une racine multiple de P.

Remarque 11. • Si α est une racine d'ordre de multiplicité m de P, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et dans ce cas, on a nécessairement $Q(\alpha) \neq 0$.

Sinon, on aurait $Q = (X - \alpha)R$, d'où $P = (X - \alpha)^{m+1}R$, ce qui contredit le fait que α est une racine d'ordre m de P.

• Si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, l'ordre de multiplicité m de toute racine α de P vérifie $m \leqslant n$.

En effet, si $P = (X - \alpha)^m Q$, alors $\deg(P) = m + \deg(Q) \geqslant m$.

Exemple 10. Soit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$. Alors P admet une racine double qui est 1 et une racine simple qui est -1.

Proposition 7: Caractérisation des racines multiples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P.
Alors α est une racine multiple de P si et seulement si $P'(\alpha) = 0$.

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$ l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P. Par définition, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

On a alors

$$P' = m(X - \alpha)^{m-1}Q + (X - \alpha)^m Q' = (X - \alpha)^{m-1}(mQ + (X - \alpha)Q').$$

Posons $R = mQ + (X - \alpha)Q'$.

On a $R(\alpha) = mQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$ d'où

$$P'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \alpha)^{m-1} = 0 \Leftrightarrow m > 1,$$

d'où l'équivalence voulue : α est une racine multiple de P (i.e. $m > 1$) si et seulement si $P'(\alpha) = 0$. ■

Remarque 12. En fait, on a montré que si α est racine d'ordre m de P, alors α est racine d'ordre $m-1$ de P'.

Par récurrence, on en déduit que si α est racine d'ordre m de P, alors

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 11. Soit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$.

On a $P' = 3X^2 - 2X - 1 = 3(X-1)(X+\frac{1}{3})$.

On remarque que puisque 1 est racine double de P, alors 1 est racine simple de P. De même, puisque -1 est racine simple de P, alors -1 n'est pas racine de P'.

En revanche, $-\frac{1}{3}$ est racine de P' mais $-\frac{1}{3}$ n'est pas racine de P.