Liste d'exercices n°22 — Polynômes réels

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que la fonction $x \longmapsto P(x)$ est paire (resp. impaire) si et seulement si tous les cœfficients d'indices impairs (resp. pairs) de P sont nuls.

Exercice 2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x).$$

Exercice 3. Soit $P\colon x \longmapsto 2x^3 - 6x + 1$.

1. Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles distinctes. Notons-les α, β et γ.
2. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

Exercice 4. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2.$$

Exercice 5. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2 + 1)P(x).$$

Exercice 6. Montrer que tout polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$ est constant.

Exercice 7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients réels. On suppose que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $P(x)Q(x) = R(x)Q(x)$.
Montrer que $P = R$ ou $Q = 0$.

Exercice 8. (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n + 1$ réels distincts et soient $a_0, \dots, a_n, n + 1$ réels (non nécessairement distincts).

1. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré au plus n vérifiant

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \text{pour tout } j \in [\![0; n]\!] \text{ tel que } j \neq i, L_i(x_j) = 0. \end{cases}$$

2. En déduire qu'il existe un unique polynôme L de degré au plus n vérifiant

$$\forall i \in [\![0; n]\!], L(x_i) = a_i.$$

Exercice 9. Factoriser le polynôme suivant :

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a et b tels que le polynôme $x \longmapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$ admette 1 comme racine double.

Exercice 11.

1. Posons $P\colon x \longmapsto 4x^3 - 16x^2 - 19x - 5$.
   Trouver les racines du polynôme P sachant qu'il possède une racine multiple.
2. Considérons les polynômes suivants :

$$Q\colon x \longmapsto x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \quad \text{et} \quad R\colon x \longmapsto x^3 - 7x^2 + 7x + 15.$$

   Trouver les racines de Q et de R sachant qu'ils possèdent une racine commune.

Exercice 12.
On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n n'admet pas de racine multiple.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

Exercice 13. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé s'il existe des réels $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et des entiers $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ tels que

$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^{m_k},$$

où a est le cœfficient dominant de P.
On dit dans ce cas que P est scindé à racines simples si pour tout $k \in [\![1, p]\!], m_k = 1$.
On suppose que $\deg(P) \geqslant 2$.

1. Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.
2. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice 14. (Formule de Taylor)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$ où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P.
2. En déduire que a est racine d'ordre m de P si et seulement si $\forall k \in [\![0, m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exercice 15. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$.
On suppose que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)$ vaut 1 et que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - b)$ vaut -1.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.