Corrigé de la liste d'exercices n°21 — Développements limités

Exercice 1

1. $e^x + \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
2. $\ln(1+x) + \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
3. $\cos(x)\sin(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$.
4. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$.
   Par primitivation, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en 0 de arctan :
$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
5. $\ln(\cos(x)) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6.
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{6}(-x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + o(x^3).\end{aligned}$$
7. $\dfrac{\cos^2(x)}{3+x^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2}{1 + \frac{x^2}{3}} = \dfrac{1}{3}(1 - x^2 + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4x^2}{9} + o(x^3)$.
8.
$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^2 - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{16} - 1 + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{17x^4}{240} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + o(x^3).\end{aligned}$$

9.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} \\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(
\\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^2 \\
&= 1 + \frac{x^2}{4} + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

12.

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)\sin(x)}{x} &= \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))}{x} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

13.

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Puisque exp est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 5, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\exp(x) \underset{x\to 5}{=} \exp(5)+\exp'(5)(x-5)+\frac{\exp''(5)}{2!}(x-5)^2+o((x-5)^2) \underset{x\to 5}{=} e^5+e^5(x-5)+\frac{e^5}{2}(x-5)^2+o((x-5)^2).$$

2. Posons $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$. Quand x tend vers 1, alors h tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}
\cos(\ln(x)) &\underset{x\to 1}{=} \cos(\ln(1+h)) \\
&\underset{h\to 0}{=} \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)^2 + o(h^3) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3) \\
&\underset{x\to 1}{=} 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3).
\end{aligned}$$

3. Puisque sin est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\sin^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

d'où

$$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Exercice 3

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^4$ au voisinage de 0, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4+o(x^4)$$

et

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3+\frac{g^{(4)}(0)}{24}x^4+o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $g''(0)=4$ et $f^{(4)}(0)=120$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
fg(x) &\underset{x\to 0}{=} (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+o(x^4))(x+2x^2+3x^3+4x^4+o(x^4))\\
&\underset{x\to 0}{=} x+2x^2+3x^3+4x^4+2x^2+4x^3+6x^4+3x^3+6x^4+4x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+4x^2+10x^3+20x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-2x-3x^2-4x^3-5x^4+(2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2-8x^3-36x^4+16x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-2x-3x^2-12x^3-25x^4+4x^2+9x^4+12x^3+16x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-2x+x^2+o(x^4).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{f(x)} &\underset{x\to 0}{=} (x+2x^2+3x^3+4x^4+o(x^4))(1-2x+x^2+o(x^4))\\
&\underset{x\to 0}{=} x-2x^2+x^3+2x^2-4x^3+2x^4+3x^3-6x^4+4x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+o(x^4).
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &\underset{x\to 0}{=} f(x+2x^2+3x^3+4x^4+o(x^4))\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+2(x+2x^2+3x^3+4x^4)+3(x+2x^2+3x^3+4x^4)^2+4(x^3+6x^4)+5x^4+o(x^4)\\
&= 1+2x+4x^2+6x^3+8x^4+3(x^2+4x^4+4x^3+6x^4)+4x^3+24x^4+5x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+2x+7x^2+22x^3+67x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\ln(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+o(x^4))\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x+3x^2+4x^3+5x^4-\frac{1}{2}(2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2+\frac{1}{3}(8x^3+36x^4)-4x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x+3x^2+\frac{20}{3}x^3+13x^4-\frac{1}{2}(4x^2+9x^4+12x^3+16x^4)+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+o(x^4).
\end{aligned}$$

(f) Notons F la primitive de f qui s'annule en 0. Par primitivation, on obtient un développement limité d'ordre 5 en 0 de F :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0)+x+x^2+x^3+x^4+x^5+o(x^5) \underset{x\to 0}{=} x+x^2+x^3+x^4+x^5+o(x^5).$$

3. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. Or, on ne connaît pas le développement limité (s'il existe !) de g en 1. On ne peut donc pas déterminer de développement limité de $g\circ f$ en 0.

4.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x+2x^2+3x^3+4x^4+o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}(1-2x-3x^2-4x^3+(2x+3x^2+4x^3)^2-(2x+3x^2+4x^3)^3+o(x^3))\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}(1-2x-3x^2-4x^3+4x^2+12x^3-8x^3+o(x^3))\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}-2+x+o(x^2).
\end{aligned}$$

5. (a) $\dfrac{x}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-2x+x^2+o(x^3)$.

(b) Pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x\mapsto \dfrac{x}{g(x)}$, il aurait fallu connaître un développement limité à l'ordre 5 en 0 de g.

6. (a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^4$ au voisinage de 0, f' est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young nous permet donc de donner le développement limité de f' en 0 à l'ordre 3, et non à l'ordre 4.

   (b) D'après la première question,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $f'(0) = 2$, $f''(0) = 6$, $f^{(3)}(0) = 24$ et $f^{(4)}(0) = 120$.

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de f' à l'ordre 3 en 0 est

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} f'(0)+f''(0)x+\frac{f^{(3)}(0)}{2}x^2+\frac{f^{(4)}(0)}{6}x^3+o(x^3) = 2+6x+12x^2+20x^3+o(x^3).$$

7. Soit $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de f.
D'après le développement limité de f, on sait que $f(0) = 1$, ou encore $f^{-1}(1) = 0$. Il s'agit donc de donner un développement de f^{-1} en 1 à l'ordre 1.
Par ailleurs, on sait que f^{-1} admet un développement limité d'ordre 1 en 1 si et seulement si f^{-1} y est dérivable.
Or, f^{-1} est dérivable en 1 car $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 2 \neq 0$ et on a donc

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le développement limité de f^{-1} en $f(0)$ à l'ordre 1 est

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 1}{=} f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1) + o(x-1) = \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1).$$

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}+o(x)} - 1\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}+o(x)-1\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x^2}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

3.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x-\sin(x))}{\sqrt{1+x^3}-1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\sin(\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1+o(1)}{3+o(1)}
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\sin(x))}{\sqrt{1+x^3}-1} = \frac{1}{3}$.

4. Tout d'abord, on a $\sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4)$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &\underset{x\to 0}{=} \sin(x(1-x+x^2-x^3+o(x^3))) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sin(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3-x^4-\frac{1}{6}(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3-x^4-\frac{1}{6}(x^3-3x^4)+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} x-x^2+\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-x+\frac{x^3}{6}+(x-\frac{x^3}{6})^2-(x-\frac{x^3}{6})^3+(x-\frac{x^3}{6})^4+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-x+\frac{x^3}{6}+x^2-\frac{x^4}{3}-x^3+x^4+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-x+x^2-\frac{5x^3}{6}+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3-\frac{5x^4}{6}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} x-x^2+\frac{5x^3}{6}-\frac{2}{3}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin^4(x)}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right] \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{6}+o(1)}{1+o(1)}$$

d'où $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^4(x)}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right] = \frac{1}{6}$.

Exercice 6

Posons $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$. Quand x tend vers $1, h$ tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)-\ln(2)}{x^2\ln(x)} &\underset{x\to1}{=} \frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{(1+h)^2\ln(1+h)} \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{\ln(\frac{2+h}{2})}{(1+2h+h^2)(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3))} \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{\ln(1+\frac{h}{2})}{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+2h^2-h^3+h^3+o(h^3)} \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)}{h+\frac{3h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)} \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{\frac{1}{2}-\frac{h}{8}+\frac{h^2}{24}+o(h^2)}{1+\frac{3h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)} \\
&\underset{h\to0}{=} \left(\frac{1}{2}-\frac{h}{8}+\frac{h^2}{24}+o(h^2)\right)\left(1-\frac{3h}{2}-\frac{h^2}{3}+\left(\frac{3h}{2}+\frac{h^2}{3}\right)^2+o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to0}{=} \left(\frac{1}{2}-\frac{h}{8}+\frac{h^2}{24}+o(h^2)\right)\left(1-\frac{3h}{2}-\frac{h^2}{3}+\frac{9h^2}{4}+o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to0}{=} \left(\frac{1}{2}-\frac{h}{8}+\frac{h^2}{24}+o(h^2)\right)\left(1-\frac{3h}{2}+\frac{23h^2}{12}+o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{1}{2}-\frac{3h}{4}+\frac{23h^2}{24}-\frac{h}{8}+\frac{3h^2}{16}+\frac{h^2}{24}+o(h^2) \\
&\underset{h\to0}{=} \frac{1}{2}-\frac{7h}{8}+\frac{19h^2}{16}+o(h^2) \\
&\underset{x\to1}{=} \frac{1}{2}-\frac{7}{8}(x-1)+\frac{19}{16}(x-1)^2+o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

La courbe admet donc en 1 une tangente d'équation $y = -\frac{7}{8}x + \frac{11}{8}$ et est située au-dessus de cette tangente au voisinage de 1.

Exercice 7

1.

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to0}{=} \frac{3}{2}(1+x+\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2))-(1+x^2+o(x^2)) \\
&\underset{x\to0}{=} 2+\frac{x^2}{2}+o(x^2).
\end{aligned}$$

2. Au voisinage de 0, on a $f(x) \geqslant 2 = f(0)$ donc f admet un minimum local en 0.
3. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction f_n définie sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \tan(x) - x$. La fonction f_n est dérivable sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de dérivée pour tout $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$,

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x).$$

Pour tout $x \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $f_n'(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

Par ailleurs, $f_n(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = -n\pi \leqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} f_n(x) = +\infty$.

Puisque f_n est continue et strictement croissante sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$f_n(x_n) = \tan(x_n) - x_n = 0$$

i.e. $\boxed{\text{il existe un unique réel}\, x_n \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan(x_n) = x_n.}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n\pi \leqslant x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2} < (n+1)\pi \leqslant x_{n+1}$ donc

$$\boxed{\text{la suite}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\text{est strictement croissante.}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\pi \leqslant x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $1 \leqslant \dfrac{x_n}{n\pi} < 1 + \dfrac{1}{2n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$.

Ceci implique que $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi.}$

Puisque $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $xn - n\pi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et par π-périodicité de tan

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

donc $x_n - n\pi$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x_n, autrement dit :

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi = \arctan(x_n).}$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n\pi = \lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(x_n) = \dfrac{\pi}{2}$.

A fortiori, $\boxed{x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2.}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x_n \geqslant n\pi > 0$.

Par imparité de la fonction tan, on sait que pour tout $x \not\equiv 0[\frac{\pi}{2}]$,

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

donc

$$\tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x_n - n\pi)} = -\frac{1}{x_n}.$$

Or, $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ donc $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à $-\dfrac{1}{x_n}$, d'où, par imparité de arctan :

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right).}$$

5. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Or, $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition de limites, $\arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x_n}$.

Or, d'après la question 2, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\dfrac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\pi}$.

On déduit alors de la question précédente que $\boxed{x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\pi}}$, d'où le développement limité voulu.