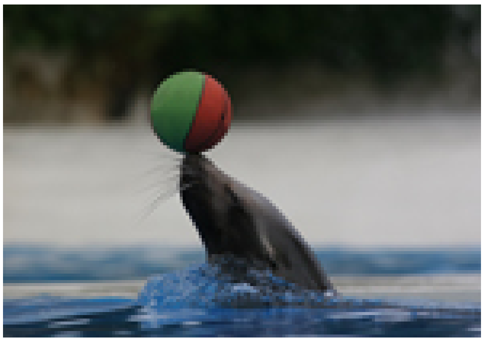
4 – Oscillateur harmonique

Dans le cas où est système est dans une position d'équilibre dite stable, ce qui correspond à un minimum de son énergie potentielle, une petite perturbation du système entraine un mouvement oscillatoire avec un retour progressif à la position d'équilibre si le système est soumis à des frottements. En l'absence de frottement, le mouvement oscillatoire perdure indéfiniment selon une loi purement sinusoïdale. Un tel cas correspond à un modèle physique d'une importance fondamentale, connu sous le nom d'oscillateur harmonique.

L'oscillateur harmonique, qui peut paraitre une simplification outrancière de la réalité puisqu'elle néglige tout phénomène dissipatif, s'avère être une modélisation très fructueuse de très nombreux phénomènes physiques ou chimiques. Il décrit le comportement de systèmes dans des domaines aussi divers que l'électrocinétique, la mécanique, l'optique ; il permet également une modélisation simple de la liaison chimique et de la spectrométrie infrarouge. Son adaptation en physique quantique permet la description de nombreux phénomènes à l'échelle atomique ou moléculaire.



source : zoo de Beauval www.zoobeauval.com

équilibre instable

photo : Thibaut Clatin

équilibre stable d'un oscillateur

Plan du chapitre

Programme officiel – Premier semestre – **Thème M – mouvements et interactions**

Notions	Capacités exigibles
M.2.2. Lois de Newton Exemple d'oscillateur harmonique : système masse - ressort en régime libre. Pulsation et période propre.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propre du mouvement.

1 Systèmes oscillants en régime libre

Dans ce chapitre, on étudie deux systèmes ocillants classiques, en se limitant au régime libre. Un systèe est un oscillateur si une petite perturbation à partir de son état d'équilibre entraine un mouvement qui le maintient autour de sa position d'équilibre initiale. Le régime est dit libre si, une fois la perturbation initiale effectuée, on laisse le système évoluer sans plus rien lui imposer, autrement dit le système évolue « comme il veut » [1]. Dans ce chapitre, on néglige tout phénomène de frottement solide ou fluide [2].

On se limite à des problèmes à un paramètre, c'est-à-dire tels que l'état du système soit entièrement déterminé par la connaissance d'une seule coordonnée. Le premier exemple classique est celui du ressort qui oscille le long de son axe ; le paramètre est alors une longueur, par exemple l'allongement du ressort. Le second exemple est celui du pendule qui oscille dans un plan ; le paramètre du problème est alors un angle.

1.1 Exemple du ressort

Considérons un ressort vertical de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k, auquel on accroche un point matériel M de masse m, qui constitue le système étudié. On se place dans le référentiel terrestre local supposé galiléen, et on définit un vecteur unitaire vertical vers le bas $\vec{u}_z$. Dans un premier temps, on peut choisir l'origine O du repère au point d'accroche du ressort.

1.1.1 Équilibre du système

Cherchons la condition vérifiée par la longueur L_{eq} du ressort à l'équilibre. À l'équilibre, la somme des forces appliquées est nulle, soit, en appelant $\vec{F}$ la force de rappel du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$$

Avec le choix de l'orientation du vecteur $\vec{u}_z$, la force de rappel s'écrit : $\vec{F} = -k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right)\vec{u}_z$; en effet, le ressort est en extension donc $L_{\text{eq}} - L_0 > 0$ et la force de rappel tend à ramener la masse vers le haut donc en sens opposé de $\vec{u}_z$. En projection sur l'axe verticale, on a donc :

$$mg - k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right) = 0$$

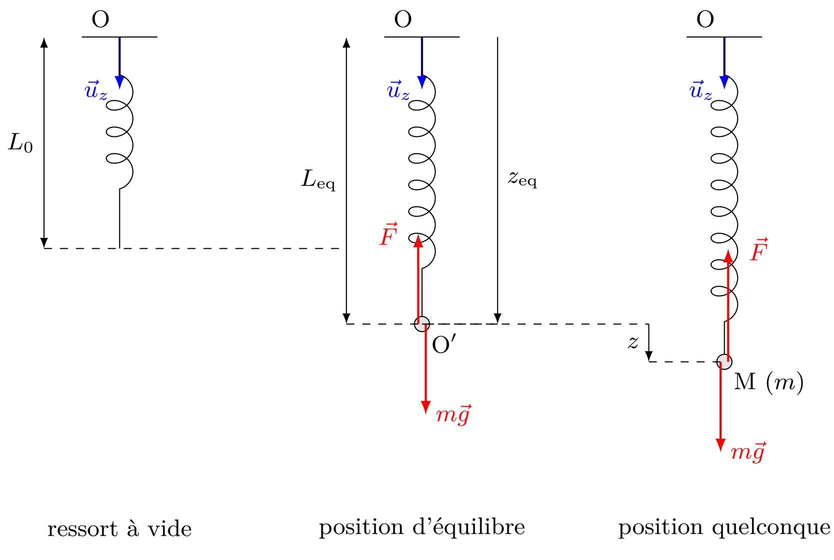


FIGURE 1 – Oscillations d'une masse à l'extrémité d'un ressort.

1. Le régime libre s'oppose au régime forcé, lorsque l'expérimentateur impose l'évolution du système par une contrainte extérieure, par exemple un moteur qui oblige le système à osciller à une fréquence fixée.

2. Le cas des systèmes oscillants avec frottements sera vu en seconde année.

1.1.2 Mouvement autour de la position d'équilibre

On écarte maintenant la masse m de sa position d'équilibre, par exemple en la tirant légèrement vers le bas, et on la lache sans vitesse initiale ; il évolue alors ultérieurement en régime libre, selon un mouvement donc on cherche l'équation différentielle.

Il est toujours plus simple de choisir une nouvelle origine des altitudes O' au niveau de la position d'équilibre ; la cote z du point M correspond alors à son écart algébrique par rapport à cette position d'équilibre. En considérant que l'écartement initial se fait selon la verticale, le mouvement est entièrement selon la verticale, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = z\,\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \dot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique en un point M quelconque de cote z (par rapport à la cote à l'équilibre). La force de rappel du ressort est proportionnelle à l'allongement du ressort par rapport à sa longeur à vide, soit à $L_{\mathrm{eq}} + z - L_0$, z étant algébrique. Le mouvement et toutes les forces étant uniquement suivant la verticale, on peut directement raisonner en projection.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \Rightarrow m\ddot{z} = mg - k\left(L_{\mathrm{eq}} + z - L_0\right) = mg - k\left(L_{\mathrm{eq}} - L_0\right) - kz$$

En utilisant la relation à l'équilibre, cette expression se simplifie [3], et il reste :

$$m\ddot{z} + kz = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}z = 0$$

1.2 Exemple du pendule

On considère maintenant un fil sans masse de longueur L accroché à son extrémité supérieure à un point O fixe. Un point matériel M de masse m est fixé à son extrémité inférieure ; ce point M constitue le système étudié. On se place dans le référentiel terrestre local supposé galiléen. On choisit un repère dont l'origine est O, avec un vecteur unitaire vertical $\vec{u}_z$ et un vecteur unitaire horizontal $\vec{u}_x$ choisi de sorte que le fil soit dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

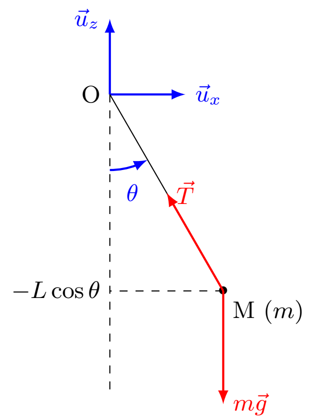


FIGURE 2 – Oscillations d'un pendule.

1.2.1 Équilibre du système

Le système est soumis uniquement à son poids et à la tension du fil. À l'équilibre, on a donc :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -m\vec{g}$$

ce qui signifie que $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{u}_z$ à l'équilibre, autrement dit que le fil est vertical, puisque la tension d'un fil est toujours colinéaire au fil.

3. La relation valable à l'équilibre permet toujours de simplifier les équations du mouvement d'un système oscillant, si le mouvement est repéré par rapport à la position d'équilibre.

1.2.2 Étude cinématique du mouvement autour de la position d'équilibre

On écarte verticalement la masse m de sa position d'équilibre d'un angle θ_0, et on la lache sans vitesse initiale. Commençons par décrire le mouvement. L'origine du repère étant O, la position du système est donnée par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = L\,\sin\theta\,\vec{u}_x + L\,\cos\theta\,\vec{u}_z = \left|\begin{array}{l} x_{(t)} = L\,\sin\theta_{(t)} \\ z_{(t)} = L\,\cos\theta_{(t)} \end{array}\right.$$

où $\theta_{(t)}$ est l'angle dont le fil est écarté de sa position d'équilibre, qui évolue au cours du mouvement, c'est-à-dire au cours du temps. La vitesse s'obtient par dérivation du vecteur position par rapport au temps. Le temps est la variable de la fonction $\theta_{(t)}$, donc $x_{(t)}$ et $z_{(t)}$ sont des composées de fonction : $\sin\circ\theta_{(t)}$ et $\cos\circ\theta_{(t)}$ respectivement. En appliquant la dérivée d'une composée de fonction, on a donc :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = L\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \cos\theta_{(t)} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -L\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \sin\theta_{(t)} \end{array}\right.$$

qu'on peut encore écrire avec la notation de Newton :

$$\vec{v} = \left|\begin{array}{l} \dot{x} = L\,\dot{\theta}\,\cos\theta_{(t)} \\ \dot{z} = -L\,\dot{\theta}\,\sin\theta_{(t)} \end{array}\right.$$

La grandeur $\dot{\theta} = \mathrm{d}\theta\,/\,\mathrm{d}t$ est appelé la **vitesse angulaire**, en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Elle est reliée à la vitesse v par la relation :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(L\,\dot{\theta}\,\cos\theta)^2 + (-L\,\dot{\theta}\,\sin\theta)^2} = L\,\dot{\theta} \times \sqrt{\sin\theta^2 + \cos\theta^2} = L\dot{\theta}$$

Par une seconde dérivation, on obtient l'expression de l'accélération. Toujours en prenant garde qu'on dérive par rapport au temps, et non par rapport à θ, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \ddot{x} = L\,\ddot{\theta}\,\cos\theta_{(t)} - L\,\dot{\theta}^2\,\sin\theta_{(t)} \\ \ddot{z} = -L\,\ddot{\theta}\,\sin\theta_{(t)} - L\,\dot{\theta}^2\,\cos\theta_{(t)} \end{cases}$$

1.2.3 Établissement de l'équation du mouvement

En une position quelconque, c'est-à-dire pour un angle θ quelconque, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{T}$$

Projetons sur les deux axes, en écrivant $\theta_{(t)} = \theta$ pour plus de clarté :

$$\begin{cases} mL\,\ddot{\theta}\,\cos\theta - mL\,\dot{\theta}^2\,\sin\theta = -T\,\sin\theta \\ -\,mL\,\ddot{\theta}\,\sin\theta - mL\,\dot{\theta}^2\,\cos\theta = mg - T\,\cos\theta \end{cases}$$

La tension du fil étant une inconnue, il faut l'éliminer du système des deux équations. Le plus simple est de multiplier la première par $\cos\theta$ et la seconde par $\sin\theta$:

$$\begin{cases} mL\,\ddot{\theta}\,\cos\theta^2 - mL\,\dot{\theta}^2\,\sin\theta\cos\theta = -T\,\sin\theta\cos\theta \\ -\,mL\,\ddot{\theta}\,\sin\theta^2 - mL\,\dot{\theta}^2\,\cos\theta\sin\theta = mg\,\sin\theta - T\,\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

puis de faire la différence membre à membre :

$$mL\ddot{\theta}\,\cos\theta^2 + mL\ddot{\theta}\,\sin\theta^2 = -mg\,\sin\theta \Rightarrow L\ddot{\theta} = -g\,\sin\theta$$

Cette équation différentielle a une solution explicite exacte, mais on peut la simplifier lorsque θ est assez petit. En effet, pour $\theta \leq \pi/6$ (en radian), l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ est très bonne ; c'est l'**approximation harmonique**[4]. En définitive, pour $\theta \leq \pi/6$, l'équation différentielle du mouvement du pendule obéit à l'équation !

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\times\theta = 0$$

1.3 Équation différentielle du mouvement

Dans le pendule comme dans la masse au bout d'un ressort, on obtient une équation différentielle de même nature : du second ordre à coefficients constants.

On appelle **oscillateur harmonique à une dimension** un système à un seul paramètre s dont l'évolution temporelle vérifie l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,s = 0}$$

Le facteur devant s est positif, et peut donc toujours être écrit sous forme d'un carré, noté usuellement ω_0^2. Par analyse dimensionnelle, comme $\mathrm{d}^2 s$ est homogène à s, ω_0^2 est homogène à des s^{-2} et ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps.

Dans le cas du ressort, $s = z$ et :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans le cas du pendule, $s = \theta$ et :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

2 Mouvement d'un oscillateur harmonique

2.1 Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$ peut s'écrire de deux façons équivalentes :

$$s_{(t)} = A\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t \qquad \text{ou} \qquad \boxed{s_{(t)} = S_0\,\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Dans les deux cas, il apparait deux constantes d'intégration (A et B ou S_0 et φ), qui s'obtiennent à l'aide des conditions initiales Supposons par exemple que le ressort vertical étudié précédemment (voir figure **??**) soit écarté de sa position d'équilibre de Z_0 vers le bas (soit $Z_0 > 0$ avec la convention choisie pour $\vec{u}_z$), et laché sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$z_{(t)} = S_0\,\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

4. Cela correspond à un développpement limité de sinus au premier ordre. On a déjà vu cette approximation en optique, où elle est connue sous le nom d'approximation de Gauss.

D'autre part, la vitesse selon z, obtenue par dérivation par rapport au temps, est :

$$v_z = \dot{z} = -S_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

À l'instant initial, on a donc :

$$z_{(0)} = Z_0 = S_0 \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad \dot{z}_{(0)} = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{(0)} = 0 = -S_0\omega_0 \sin\varphi$$

De la seconde équation, on déduit $\varphi = 0$ (la solution $S_0 = 0$ correspond à $z_{(t)} = 0$, c'est-à-dire au système restant en permanence à sa position d'équilibre). En reportant dans la première, on a $Z_0 = S_0$. En définitive, le mouvement est de la forme :

$$z_{(t)} = Z_0 \cos\omega_0 t \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

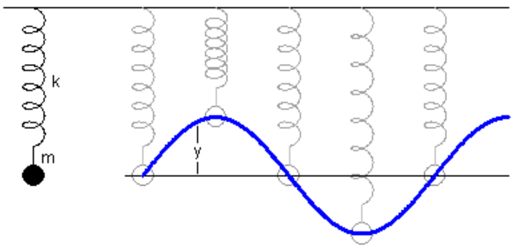


FIGURE 3 – Mouvement oscillant d'une masse à l'extrémité d'un ressort.
Source : https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1121702

2.2 Analyse du mouvement

Le mouvement est de type oscillatoire, puisque le paramètre du problème suit une loi sinusoïdale. Son amplitude est S_0 dans le cas général (Z_0 dans le cas du ressort) et sa **pulsation propre** vaut ω_0, ce qui correspond à une **période propre** T_0 et une **fréquence propre** f_0 telles que :

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Dans le cas général, au cours du temps, le paramètre du mouvement qui est égal ou directement relié à l'écart à la position d'équilibre, reste compris entre les deux valeurs extrêmes $+S_0$ et $-S_0$. Le système reste donc confiné autour de la position d'équilibre ; il est dans un état lié [5].

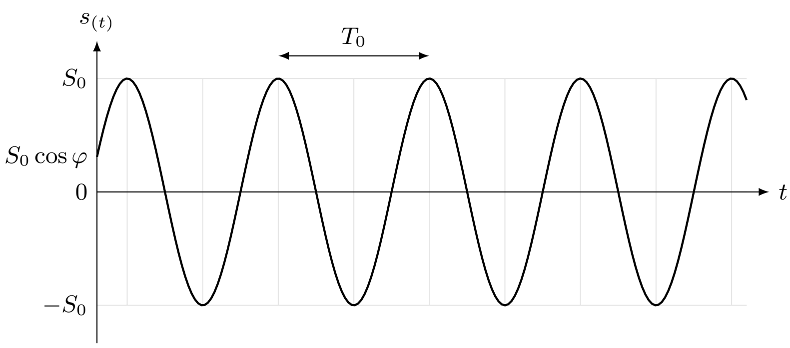


FIGURE 4 – Mouvement périodique d'un oscillateur harmonique.

5. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, le système oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre. Dans la réalité, il existe des frottements qui tendent à diminuer petit à petit l'amplitude du mouvement. Le système est qualifié d'oscillateur amorti, et son étude est au programme de seconde année.

On remarque que **la fréquence propre du mouvement ne dépend que de caractéristiques intrinsèques au système** (g et L pour le pendule, k et m pour le ressort) ; elle est en particulier indépendante de l'écartement initial. C'est la fréquence qu'adopte spontanément le système lorsqu'on le laisse évoluer librement. Les oscillateurs peuvent aussi osciller à une fréquence différente de leur fréquence propre, si l'opérateur impose cette fréquence par un dispositif extérieur [6].

Dans tous les cas, la position du système est directement reliée à la grandeur $s_{(t)}$, qui est une fonction sinusoïdale. La vitesse du système est reliée à la dérivée de $s_{(t)}$:

$$\begin{aligned} s_{(t)} &= S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{s} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -S_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = S_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \end{aligned}$$

On constate que la vitesse et la position sont en quadrature de phase, c'est-à-dire déphasées de $\pi/2$. Lorsque le mobile est écarté au maximum de la position d'équilibre, soit si $|\cos(\omega_0 t + \varphi)| = 1$, alors $\sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$ et $\dot{s} = 0$, c'est-à-dire que la vitesse est nulle. À cet instant, le mobile change de sens de déplacement, ce qui implique une annulation de la vitesse. Inversement, lorsque le mobile passe par la position d'équilibre, soit $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$, alors $|\sin(\omega_0 t + \varphi)| = 1$ et la vitesse est maximale.

6. Dans le cas du pendule, par exemple, il faudrait installer un moteur qui obligerait le système à osciller à une fréquence particulière. Il s'agit alors d'oscillations forcées ; elles seront étudiée en deuxième année dans le cas des oscillateurs électriques.