Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°9
Jeudi 12 juin 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, de deux problèmes et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Les questions d'informatique qui sont à rendre sur une copie séparée sont les suivantes :
- Problème 1, questions 2.(a), (b) et (c).
- Problème 2, questions 3.(d) et 4.(c).

Exercice 1 : Les nombres complexes au renfort des équations différentielles

1. (a) A l'aide des nombres complexes, linéariser $\sin^3(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = (1+x^2)\sin^3(x).$$

Exercice 2 : Hyperplans en dimension finie (ou l'algèbre linéaire au renfort de la géométrie)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
On appelle *hyperplan de* E tout sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n-1$.
On appelle également *forme linéaire non nulle sur* E toute application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle.

1. On fixe dans cette question un hyperplan H de E et une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H.
   (a) Soit $u \in E \setminus H$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, u)$ est une base de E.
   (b) En déduire que pour tout vecteur x de E, il existe un unique vecteur $h \in H$ et un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$x = h + \lambda u.$$
2. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.
   (b) Réciproquement, soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \ker(\varphi)$.
   (c) En déduire que si $E = \mathbb{R}^n$ et si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, alors il existe des scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls tels que
$$H = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}.$$
3. Soient φ et ψ des formes linéaires non nulles sur E.
   Montrer l'équivalence suivante :
$$\ker(\varphi) = \ker(\psi) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in E, \varphi(x) = \lambda \psi(x).$$
4. **Application :** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Soit φ une forme linéaire sur E telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \varphi((X-a)P(X)) = 0$.
   Montrer qu'il existe un réel λ tel que pour tout $P \in E, \varphi(P) = \lambda P(a)$.

Problème 1 : L'algèbre linéaire et les polynômes au renfort des probabilités

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.
On répartit initialement et de manière aléatoire les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.
On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.
On suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_0.
2. (a) Ecrire une fonction Python `etape(A)` qui prend en entrée une liste `A` reprénsentant le contenu de l'urne A à un moment donné, qui simule une étape de l'expérience aléatoire, et renvoie le contenu de l'urne A après cette étape.

   On rappelle qu'après avoir écrit `import random as rd`, la commande `rd.randint(1,n)` renvoie un nombre entier pris au hasard entre 1 et n et que la commande `L.remove(x)` retire un élément x d'une liste L.

   (b) Ecrire une fonction Python `simule_X(n,A)` qui prend en entrée un entier `n` et une liste `A` représentant le contenu initial de l'urne A et qui simule la variable aléatoire X_n, c'est à dire qui renvoie le nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

   (c) Ecrire une fonction Python `esp_X(n,A)` qui prend en entrée un entier `n` et une liste `A` représentant le contenu initial de l'urne A et qui estime l'espérance de la variable aléatoire X_n. On pourra par exemple d'abord construire une liste qui contient un grand nombe de simulations de X_n. Comment optimiser cette estimation ?

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

3. Déterminer U_0 et vérifier que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = MU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction de U_0 pour tout entier naturel n.
4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

   Soit φ l'application définie sur E par
   $$\forall P \in E, \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $P_k(X) = \dfrac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.

   Montrer que pour tout $k \in [\![0,3]\!], \varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k$.

   (c) Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

   Indication : évaluer ces polynômes en des réels bien choisis.

   (d) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. L'application φ est-elle un automorphisme de E ?

5. On pose $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.
   (a) Ecrire la matrice des coordonnées de Q dans la base canonique $\mathcal{B}'$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.
   (c) Ecrire la matrice des coordonnées de Q dans la base canonique $\mathcal{B}$. Quelle matrice reconnaît-on ?
   (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$.
   (e) A l'aide des résultats des questions précédentes, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3).$$

6. Par quelle loi usuelle pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?

Problème 2 : Les développements limités au renfort des suites et des intégrales

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
2. (a) Démontrer que f réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ dans lui-même.
   (b) En déduire que :
$$\forall x \in [0,1], (1-x)e^x \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
3. On fixe un réel α appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ et on considère les deux suites ci-dessous définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n^{-\alpha} \quad \text{et} \quad y_n = f(x_n).$$
   (a) Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, x_n], \quad y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant (1-x)e^x.$$
   (b) Démontrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} x_n\sqrt{n} = +\infty.$$
   (c) Rappeler le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 3 en 0 et en déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} y_n^n = 1.$$
   (d) On fixe dans cette question uniquement $\alpha = 0,4$.
   Ecrire une fonction Python `y(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de y_n, puis écrire un script qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $|1 - y_n^n| \leqslant 0.001$.
4. On pose :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx.$$
   (a) Calculer I_1.
   (b) Justifier que $I_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ où $g : x \mapsto (1-x)e^x$.

(c) On rappelle que après avoir écrit la commande `import numpy as np`, la commande `np.linspace(0,1,n)` renvoie une liste constituée de n points entre 0 et 1 régulièrement espacés.

Ecrire un programme Python qui permet d'approximer l'intégrale I_1.

(d) Démontrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}}\,dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}}\,dx.$$

(e) En posant le changement de variable $t = x\sqrt{n}$, montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqslant I_n\sqrt{n} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (cette intégrale s'appelle l'intégrale de Gauss).

(f) En conclure que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$