CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°9
Jeudi 12 juin 2025 (4h00)

Exercice 1 : Les nombres complexes au renfort des équations différentielles

1. (a) D'après la formule d'Euler, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{8i} (2i \sin(3x) - 6i \sin(x))$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x).}$$

(b) En primitivant $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, on en déduit que la fonction

$$\boxed{x \mapsto -\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{12} \cos(3x) \text{ est une primitive de } x \mapsto \sin^3(x) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. • Résolvons d'abord l'équation homogène

$$(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = 0.$$

Soit $a : x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est $A : x \mapsto -\ln(1+x^2)$. L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda e^{\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

d'où

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda(1+x^2), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Trouvons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode de variation de la constante, ce qui revient à chercher une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)(1+x^2)$, où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = (1+x^2) \sin^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)(1+x^2) + 2x\lambda(x) - 2x\lambda(x) = (1+x^2) \sin^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \sin^3(x). \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$. D'après la première question, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x)$.

On obtient donc $y : x \mapsto (1+x^2) \left(\frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x) \right)$ comme solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto y(x) = (1+x^2) \left(\lambda + \frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x) \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2 : Hyperplans en dimension finie (ou l'algèbre linéaire au renfort de la géométrie)

1. (a) • Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ est libre.

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + a_n u = 0$ (*).

Si $a_n \neq 0$, on a $u = -\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k \in H$ (car $(e_1, \dots, e_{n-1}) \in H^{n-1}$ et H est un sous-espace vectoriel de E donc stable par combinaisons linéaires) ce qui est absurde.

Ainsi, on a nécessairement $a_n = 0$ et la relation (*) devient $\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k = 0$. Or, la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre puisque c'est une base de H , ce qui implique que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_k = 0$ et finalement pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = 0$ donc la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ est libre.

C'est une famille libre constituée de n vecteurs dans E qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , ce qui permet de conclure que $(e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ est une base de E .

(b) Soit $x \in E$. Montrons l'existence et l'unicité du vecteur $h \in H$ et du scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x = h + \lambda u$.

Existence : D'après la question précédente, $(e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ est une base de E donc il existe des scalaires $(a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda u$.

Posons $h = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k$. Alors $h \in H$ puisque $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H et on a bien $x = h + \lambda u$.

Unicité : Supposons qu'il existe $(h, h') \in H^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x = h + \lambda u = h' + \lambda' u.$$

On a alors $h - h' = (\lambda' - \lambda)u$. Si $\lambda' - \lambda \neq 0$, on a $u = \frac{1}{\lambda' - \lambda}(h - h') \in H$, ce qui est absurde par définition de u . On en déduit que $\lambda' - \lambda = 0$, d'où $\lambda = \lambda'$, ce qui implique que $h - h' = 0$, d'où $h = h'$.

On a donc bien prouvé qu'

$$\boxed{\text{il existe un unique } h \in H \text{ et un unique } \lambda \in \mathbb{R}, x = h + \lambda u.}$$

2. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ non nulle. L'ensemble $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Ainsi, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 0$ ou 1 . Puisque φ n'est pas l'application nulle, $\dim(\text{Im}(\varphi)) \neq 0$ donc nécessairement $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$.

Puisque E est de dimension finie, on a d'après le théorème du rang

$$\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

d'où $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = n - 1$, ce qui prouve que

$$\boxed{\ker(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E.}$$

(b) Soit H un hyperplan de E . Soit $u \in E \setminus H$.

On a montré en question 1 que pour tout $x \in E$, il existe un unique $h \in H$ et un unique $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $x = h + \lambda_x u$.

Considérons l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_x \end{array},$$

qui est bien définie sans ambiguïté, puisque pour tout $x \in E$, le scalaire λ_x est uniquement déterminé.

• Montrons que φ est une forme linéaire non nulle sur E .

Soient $(x, y) \in E^2$. Il existe des uniques vecteurs $(h, h') \in H^2$ et des scalaires uniques $(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = h + \lambda_x u$ et $y = h' + \lambda_y u$.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors $\alpha x + \beta y = \alpha h + \beta h' + (\alpha \lambda_x + \beta \lambda_y)u$ avec $\alpha h + \beta h' \in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel de E et $\alpha \lambda_x + \beta \lambda_y \in \mathbb{R}$.

Par définition de φ , on a alors $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda_x + \beta \lambda_y = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$, ce qui prouve que φ est linéaire.

De plus, φ est non nulle puisque $\varphi(u) = 1$.

• Montrons que $H = \ker(\varphi)$.

Soit $x \in H$. Alors il existe $h = x \in H$ tel que $x = h + 0 \times u$ donc $\lambda_x = 0$, i.e. $\varphi(x) = 0$ donc $x \in \ker(\varphi)$. Ceci prouve l'inclusion $H \subset \ker(\varphi)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(\varphi)$. Ainsi, $\lambda_x = \varphi(x) = 0$ donc il existe $h \in H$ tel que $x = h + 0 \times u = h \in H$. Ceci prouve l'inclusion $H \supset \ker(\varphi)$.

Finalement, on a bien montré l'existence d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \ker(\varphi)$.

(c) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $H = \ker(\varphi)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{C} = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$. Soit $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = (a_1 \ \dots \ a_n) \in \mathcal{M}_{1, n}(\mathbb{R})$ la matrice de φ dans la base canonique où pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \varphi(e_k)$. Puisque φ n'est pas identiquement nulle, les $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ ne sont pas tous nuls.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right)$$

d'où pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$.

On a donc bien

$$H = \ker(\varphi) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}, \text{ avec } (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$

3. • Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \lambda \psi(x)$.

Soit $x \in \ker(\psi)$. On a $\varphi(x) = \lambda \psi(x) = 0$ donc $x \in \ker(\varphi)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$.

Or, d'après la question 2.(a), puisque φ et ψ sont des formes linéaires non nulles sur E , $\ker(\varphi)$ et $\ker(\psi)$ sont des hyperplans de E donc $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\ker(\psi)) = n - 1$.

Ainsi, on a $\begin{cases} \ker(\psi) \subset \ker(\varphi) \\ \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\ker(\psi)) \end{cases}$, ce qui implique que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$.

• Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$. Notons H cet hyperplan de E . Soit $u \in E \setminus H$.

Soit $x \in E$.

D'après la question 1.(b), il existe un unique $h \in H$ et un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = h + \alpha u$.

Par linéarité de φ , on a $\varphi(x) = \varphi(h) + \alpha\varphi(u)$. Puisque $h \in H = \ker(\varphi)$, on a

$$\varphi(x) = \alpha\varphi(u).$$

De même, puisque $H = \ker(\psi)$, on a $\psi(x) = \alpha\psi(u)$.

Puisque $u \notin H$, alors $u \notin \ker(\varphi)$ et $u \notin \ker(\psi)$ donc $\varphi(u) \neq 0$ et $\psi(u) \neq 0$.

Posons $\lambda = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \in \mathbb{R}^*$.

On a alors $\varphi(x) = \lambda\psi(x)$.

Le réel λ choisi ne dépendant pas de x , on a bien pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \lambda\psi(x)$ pour

$$\lambda = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \in \mathbb{R}^*.$$

Finalement, on a bien montré l'équivalence

$$\boxed{\ker(\varphi) = \ker(\psi) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in E, \varphi(x) = \lambda\psi(x).}$$

$$4. \bullet \text{ Soit } \psi : \begin{array}{ccc} E = \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}.$$

Vérifions que ψ est linéaire. Soient $(P, Q) \in E^2$, soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\psi(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(a) = \alpha P(a) + \beta Q(a) = \alpha\psi(P) + \beta\psi(Q)$ donc ψ est bien linéaire.

De plus, ψ n'est pas l'application nulle car, par exemple, $\psi(1) = 1 \neq 0$.

On sait que $\ker(\psi) = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\} = \{(X - a)P \mid P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

Ainsi, l'hypothèse de l'énoncé implique que $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$.

Si φ est l'application nulle, alors $\varphi = \lambda\psi$ avec $\lambda = 0$.

Supposons dorénavant que φ n'est pas l'application nulle. Puisque φ et ψ sont des formes linéaires non nulles sur E qui est de dimension finie (égale à $n + 1$), alors $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\ker(\psi)) = n$ donc l'inclusion $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$ implique en fait que $\ker(\psi) = \ker(\varphi)$.

D'après la question précédente, on en déduit l'existence d'un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \lambda\psi(P) = \lambda P(a)$.

Dans tous les cas, on a bien montré qu'

$$\boxed{\text{il existe un réel } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } P \in E, \varphi(P) = \lambda P(a).}$$

Problème 1 : L'algèbre linéaire et les polynômes au renfort des probabilités

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{4}$. On a alors

$$\mathbb{E}(X_0) = \sum_{k=0}^3 k\mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = \frac{6}{4}$$

d'où $\mathbb{E}(X_0) = \frac{3}{2}$.

D'après la formule de König-Huygens, $V(X_0) = \mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}(X_0)^2$. Par ailleurs, d'après la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X_0^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{4}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Ainsi, $V(X_0) = \mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}(X_0)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4}$ d'où $V(X_0) = \frac{5}{4}$.

```
2. (a) import random as rd
    def etape(A):
        x=rd.randint(1,3)
        if x in A:
            A.remove(x)
        else:
            A.append(x)
        return A
    (b) def simule_X(A,n):
        for k in range(n):
            etape(A)
        return len(A)
    (c) def esp_X(A,n):
        L=[simule_X(A,n) for k in range(10000)]
        return sum(L)/len(L)
```

On peut optimiser cette estimation en prenant un nombre beaucoup plus grand que 10000.

3. Par définition, on a $U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ \mathbb{P}(X_2 = 0) \\ \mathbb{P}(X_3 = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque X_n peut prendre comme valeurs tous les entiers entre 0 et 3, les événements $(X_n = k)_{0 \leq k \leq 3}$ forment un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales dans ce système complet d'événements, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 0).$$

Puisqu'on change une boule d'urne à chaque étape, pour qu'il y ait 0 boule dans l'urne A après $n + 1$ étapes, il y avait nécessairement 1 boule dans l'urne A après n étapes, donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

On a donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$. Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ représente la probabilité d'avoir retiré une boule dans l'urne A , sachant que celle-ci ne contenait qu'une boule. C'est donc la probabilité d'avoir tiré le bon nombre entre 1 et 3, d'où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_n = 1)$.

De manière symétrique, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 3) = \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3),$$

puisque pour avoir 3 boules dans l'urne A après $n + 1$ étapes, il y avait nécessairement 2 boules dans l'urne A après n étapes.

Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3)$ représente la probabilité d'avoir retiré une boule dans l'urne B , sachant que celle-ci ne contenait qu'une boule. C'est donc la probabilité d'avoir tiré le bon nombre entre 1 et 3, d'où $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_n = 2)}$.

Toujours d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1).$$

Pour qu'il y ait 1 boule dans l'urne A après $n + 1$ étapes, il faut qu'il y ait 0 ou 2 boules dans l'urne A après n étapes donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et on a donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1).$$

Le nombre $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$ représente la probabilité d'avoir rajouté une boule dans l'urne A après l'étape $n + 1$ sachant qu'il n'y avait pas de boule dans l'urne A après n étapes. Dans ce cas, le nombre choisi à l'étape $n + 1$ est forcément le nombre d'une boule qui se trouve dans l'urne B (puisque elles y sont toutes) donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$.

De même, le nombre $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$ représente la probabilité d'avoir tiré une boule dans l'urne A après la n -ème étape, alors que celle-ci en contenait 2.

On a donc $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(X_n = 2)}$.

En raisonnant de même, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3)}$.

Finalement, on a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M U_n}$.

On en déduit par une récurrence immédiate que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0}$.

4. (a) Pour tout $P \in E$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$ donc $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

• Montrons que φ est linéaire.

Soient $(P, Q) \in E^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda X P(X) + \mu X Q(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda(X P(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X)) + \mu(X Q(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)Q'(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

• Vérifions que φ est un endomorphisme de E . Pour cela, puisqu'on sait déjà que φ est linéaire, il suffit de vérifier que $\varphi : E \rightarrow E$, i.e. que $\varphi(E) \subset E$.

Par définition, on a $\varphi(1) = X$, $\varphi(X) = X^2 + \frac{1}{3}(1 - X^2) = \frac{2}{3}X^2 + \frac{1}{3}$,

$$\varphi(X^2) = X^3 + \frac{1}{3}(1 - X^2) \times 2X = \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{3}X$$

et

$$\varphi(X^3) = X^4 + \frac{1}{3}(1 - X^2) \times 3X^2 = X^2.$$

On remarque que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) \in E^4$. Ainsi, puisque $1, X, X^2, X^3$ est une base de E , on a

$$\varphi(E) = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) \subset E$$

donc φ est un endomorphisme de E .

D'après les calculs faits précédemment, la matrice de φ dans la base canonique de E est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = M.$$

(b) • On a $P_0 = \frac{1}{8}(X + 1)^3 = \frac{1}{8}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$.

Par linéarité de φ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(P_0) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) + 3\varphi(X^2) + 3\varphi(X) + 3\varphi(1)) \\ &= \frac{1}{8}(X^2 + X^3 + 2X + 2X^2 + 1 + X) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_0) = (1 - \frac{2}{3} \times 0)P_0$.

• On a $P_1 = \frac{1}{8}(X - 1)(X + 1)^2 = \frac{1}{8}(X - 1)(X^2 + 2X + 1) = \frac{1}{8}(X^3 + X^2 - X - 1)$.

Par linéarité de φ , on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) + \varphi(X^2) - \varphi(X) - \varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8} \left(X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{3} - X \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{3}P_1
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_1) = (1 - \frac{2}{3} \times 1)P_1$.

• On a $P_2 = \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1) = \frac{1}{8}(X^2 - 2X + 1)(X+1) = \frac{1}{8}(X^3 - X^2 - X + 1)$.

Par linéarité de φ , on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_2) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) - \varphi(X^2) - \varphi(X) + \varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8} \left(X^2 - \frac{1}{3}X^3 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{3} + X \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{3}P_2
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_2) = (1 - \frac{2}{3} \times 2)P_2$.

• Enfin, $P_3 = \frac{1}{8}(X-1)^3 = \frac{1}{8}(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$.

Par linéarité de φ , on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_3) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) - 3\varphi(X^2) + 3\varphi(X) - 3\varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8}(X^2 - X^3 - 2X + 2X^2 + 1 - X) \\
&= \frac{1}{8}(-X^3 + X^2 - 3X + 1) \\
&= -P_3
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_3) = (1 - \frac{2}{3} \times 3)P_3$.

Enfin, on a bien pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $\varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k$.

(c) • Montrons que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre.

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{k=0}^3 a_k P_k = 0$, i.e. $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^3 a_k P_k(x) = 0.$$

En évaluant cette égalité en 1, puisque $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = 0$, on obtient $a_0 P_0(1) = 0$. Or, $P_0(1) \neq 0$ donc $a_0 = 0$.

De même, en évaluant cette égalité en -1 , puisque $P_1(-1) = P_2(-1) = 0$, on obtient $a_3 P_3(-1) = 0$. Or, $P_3(-1) \neq 0$ donc $a_3 = 0$.

Il reste alors $a_1P_1 + a_2P_2 = 0$.

En évaluant cette égalité en 0, on obtient $a_1P_1(0) + a_2P_2(0) = 0$, i.e. $-\frac{1}{8}a_1 + \frac{1}{8}a_2 = 0$ d'où $a_1 = a_2$.

Enfin, en évaluant cette égalité en 2, on obtient $a_1P_1(2) + a_2P_2(2) = 0$, i.e. $\frac{9}{8}a_1 + \frac{3}{8}a_2 = 0$. Puisque $a_1 = a_2$, on en conclut que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ donc la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille libre à 4 vecteurs de E .

Or, $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E .

(d) D'après les résultats obtenus en question précédente, on a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, ce qui implique que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible, et on en déduit que φ est un automorphisme de E .

5. (a) On remarque (en lisant l'énoncé de la question suivante...) que $Q = P_0 + P_2$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n(Q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n)\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi))^n \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q)$.

$$\text{Or, d'après la question 4.(d), } (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi))^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n(Q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.

(c) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = U_0$.

(d) D'après la question 3, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$. Or, on vient de voir que $U_0 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q)$ et on sait d'après la question 3.(a) que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ donc

$$U_n = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))^n \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question 5.(b) que $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_0) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Puisque $U_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1 + (-\frac{1}{3})^n) \\ \frac{1}{8}(3 - (-\frac{1}{3})^n) \\ \frac{1}{8}(3 - (-\frac{1}{3})^n) \\ \frac{1}{8}(1 + (-\frac{1}{3})^n) \end{pmatrix}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{8} \left(3 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right).$$

Puisque $|\frac{1}{3}| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = 0$ et on obtient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{3}{8}.$
--

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$. On a pour

tout $k \in \llbracket 0, 3, \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{3-k} = \frac{1}{8} \binom{3}{k}$ donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

On reconnaît les limites trouvées en question précédente.

On peut donc approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n par une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Problème 2 : Les développements limités au renfort des suites et des intégrales

1. Posons $X = x + \frac{x^2}{2}$. On a bien X tend vers 0 quand x tend vers 0.

On sait que le développement limité à l'ordre 3 de $\exp$ en 0 est

$$\exp(X) \underset{X=0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3)$$

donc le développement limité de $\exp^{x+\frac{x^2}{2}}$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\begin{aligned} \exp^{x+\frac{x^2}{2}} &\underset{X=0}{=} \exp(X) \\ &\underset{X=0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3) \\ &\underset{x=0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x=0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x=0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 f(x) &\underset{x=0}{=} (1-x)\left(1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\right) \\
 &\underset{x=0}{=} 1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)-x-x^2-x^3+o(x^3) \\
 &\underset{x=0}{=} \boxed{1-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}.
 \end{aligned}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ et on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f'(x) = -e^{x+\frac{x^2}{2}} + (1-x)(1+x)e^{x+\frac{x^2}{2}} = -x^2e^{x+\frac{x^2}{2}}.$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante (donc injective) sur $[0, 1]$.

De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [0, 1]$. Ainsi, f est surjective sur $[0, 1]$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ réalise une bijection strictement décroissante de } [0, 1] \text{ dans lui-même.}}$

- (b) On en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 1$, i.e. $(1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}} \leq 1$. En multipliant cette inégalité par $e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est bien strictement positif, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], (1-x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $n \geq 1$ et que $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$, $n^\alpha \geq 1$ donc $x_n = \frac{1}{n^\alpha} \in]0, 1[$.

Soit $x \in [0, x_n] \subset [0, 1]$. Par stricte décroissance de f sur $[0, 1]$, on en déduit que $f(x) \geq f(x_n)$, i.e. $(1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}} \geq y_n$ d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, x_n], y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1-x)e^x.}$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \sqrt{n} = n^{-\alpha} n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}-\alpha}$. Or, par hypothèse, $\frac{1}{2} - \alpha > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}-\alpha} = +\infty$, ce qui prouve que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = +\infty.}$$

- (c) On a $\ln(1-x) \underset{x=0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc à partir d'un certain rang, $x_n \in]0, 1[$. Or, si $x_n \in]0, 1[$, alors $y_n = f(x_n) > 0$.

On peut donc écrire que, à partir d'un certain rang,

$$y_n^n = e^{n \ln(y_n)} = e^{n \ln(f(x_n))} = e^{n \left(\ln(1-x_n) + x_n + \frac{x_n^2}{2} \right)}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, on peut utiliser le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1-x)$ pour obtenir le développement asymptotique suivant de y_n^n :

$$y_n^n = e^{n \left(\ln(1-x_n) + x_n + \frac{x_n^2}{2} \right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \left(-x_n - \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_n^3}{3} + o(x_n^3) + x_n + \frac{x_n^2}{2} \right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n \frac{x_n^3}{3} + o(nx_n^3)}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n^{-\alpha}$ donc

$$y_n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-\frac{1}{3}n^{1-3\alpha} + o(n^{1-3\alpha})}.$$

Or, $\alpha > \frac{1}{3}$ donc $1 - 3\alpha < 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3}n^{1-3\alpha} = 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$, on en déduit par composition de limites que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n = 1.}$$

```
(d) def x(n):
    return n**(-0.4)

def y(n):
    return(1-x(n))*exp(x(n)+(x(n))**2/2)

n=1
while abs(1-y(n))>0.001:
    n+=1
print(n)
```

Ceci renvoie 139.

4. (a) En réalisant une intégration par parties, on obtient

$$I_1 = \int_0^1 ((1-x)e^x)dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + [e^x]_0^1$$

donc $\boxed{I_1 = e - 2.}$

(b) Soit $g : x \mapsto (1-x)e^x$. La fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a alors

$$\boxed{I_1 = \int_0^1 g(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right).}$$

```
(c) import numpy as np
def g(x):
    return((1-x)*exp(x))

L=np.linspace(0,1,100000)
sum([g(x) for x in L])/len(L)
```

Ceci renvoie 0.7182796456181129, ce qui est une bonne valeur approchée de $e - 2$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• D'après la question 3.(a), pour tout $x \in [0, x_n]$, on a $y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1-x)e^x$.

Par croissance de l'application $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $x \in [0, x_n]$, $y_n^n e^{-\frac{nx^2}{2}} \leq ((1-x)e^x)^n$ puis par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{x_n} y_n^n e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq \int_0^{x_n} ((1-x)e^x)^n dx.$$

De plus, d'après la relation de Chasles,

$$I_n - \int_0^{x_n} ((1-x)e^x)^n dx = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx - \int_0^{x_n} ((1-x)e^x)^n dx = \int_{x_n}^1 ((1-x)e^x)^n dx \geq 0$$

car $x_n \leq 1$ et que pour tout $x \in [x_n, 1]$, $((1-x)e^x)^n \geq 0$.

On a donc bien

$$y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq \int_0^{x_n} ((1-x)e^x)^n dx \leq I_n.$$

• Par ailleurs, d'après la question 2.(b), pour tout $x \in [0, 1]$, $(1-x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Toujours par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$((1-x)e^x)^n \leq e^{-\frac{nx^2}{2}},$$

d'où, par croissance de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx.$$

On en conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On réalise le changement de variable $t = x\sqrt{n} \Leftrightarrow x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ dans les deux intégrales qui apparaissent dans le premier membre et le troisième membre de l'inégalité ci-dessus.

Puisque $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$, on a $dx = \frac{dt}{\sqrt{n}}$ et on obtient

$$y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{n}} \leq I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{n}}$$

puis en multipliant par $\sqrt{n} > 0$, on trouve bien

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq I_n \sqrt{n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

(f) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et que, d'après l'énoncé, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, on en

déduit par composition de limites que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

De même, puisque d'après la question 3.(b), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\sqrt{n} = +\infty$, on en déduit que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. De plus, on sait d'après la question 3.(c) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n = 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, d'où

$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ puis en divisant par $\sqrt{n}$, on obtient bien

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$