PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

Diffusion de particules

Plan du chapitre

Programme officiel – Premier semestre – **Thème T – phénomènes de transport**

Notions	Capacités exigibles
Modèle phénoménologique de transport de matière Flux convectif et flux diffusif de particules.	Distinguer un transport de matière diffusif d'un transport convectif.
Loi phénoménologique de Fick donnant le flux diffusif en fonction de la dérivée de la densité volumique de particules par rapport à une seule coordonnée spatiale, à travers une surface plane, cylindrique ou sphérique, adaptée à la géométrie considérée.	Discuter des dépendances du flux de particules à travers une membrane en fonction de ses paramètres géométriques (épaisseur et surface de la membrane) et physique (nature du milieu) en lien avec des applications biologiques.
Coefficient de diffusion.	Citer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion dans un gaz ou d'une espèce dissoute en solution aqueuse dans les conditions usuelles.
Loi d'échelle liant les échelles caractéristiques spatiales et temporelles et le coefficient de diffusion.	Exploiter la loi d'échelle liant les échelles caractéristiques spatiales et temporelles et le coefficient de diffusion.
Bilan de particules en régime stationnaire ou quasi-stationnaire.	Établir un bilan de particules éventuellement en présence de sources internes. Exploiter la conservation du flux de particules en régime stationnaire et en l'absence de sources internes.

1 Transport par diffusion

1.1 Convection et diffusion

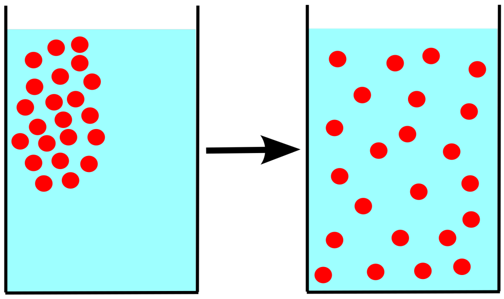
Auteur : Bruce Blauss, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blausen_0315_Diffusion.png

Convection

La convection est un transport de matière dû à un mouvement d'ensemble.
Exemple : transport d'eau par convection lors du déplacement d'un nuage.

Diffusion

La diffusion est un transport de matière sans mouvement d'ensemble. Elle a lieu dans un milieu support immobile à l'échelle macroscopique.
Exemple : transport d'une molécule colorée dans un verre d'eau.



Auteur : JrPol, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4586487

Moteur de la diffusion

La diffusion est causée par une inhomogéité de la concentration d'une espèce dans un milieu support.

Mécanisme de la diffusion

La diffusion s'opère exclusivement par l'agitation aléatoire à l'échelle moléculaire, qui tend à répartir uniformément chaque type de molécule dans l'espace disponible.

1.2 Densité volumique de particules

Densité particulaire

On appelle **densité volumique de particules** ou **densité particulaire** n^* d'une espèce le nombre de molécules de cette espèce par unité de volume.
La densité particulaire est en m^{-3}.

Propriété de la densité volumique de particules

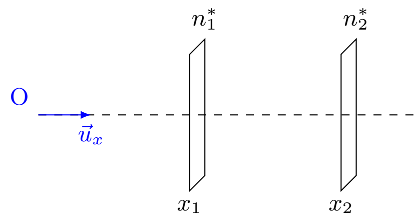
C'est une grandeur intensive, qui dépend *a priori* du lieu et de la date : $n^*_{(x,y,z,t)}$.

Application 1 : lien avec la concentration molaire

Établir le lien entre la densité volumique de particules et la concentration molaire pour une espèce donnée.
Calculer la densité volumique de particules dans une solution de saccharose à $200\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$ (masse molaire du saccharose : $M = 342{,}3\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$).
Calculer la concentration molaire du dioxygène dans l'eau, si la concentration particulaire est de $1{,}56\cdot10^{17}\,\mathrm{cm^{-3}}$.

Cas d'une symétrie axiale

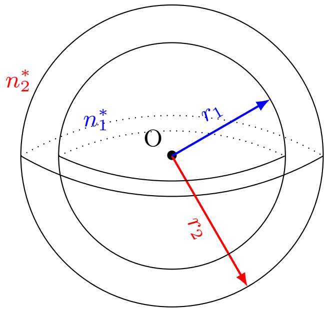
Si la diffusion se fait uniquement le long d'un axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$, la symétrie est dite axiale. La densité volumique de particules est invariante par rotation autour de l'axe x.



Dépendance spatiale de la densité volumique de particules

En symétrie axiale, la densité volumique de particules ne dépend que de l'abscisse et du temps : $n^*_{(x,t)}$.

Cas d'une symétrie sphérique

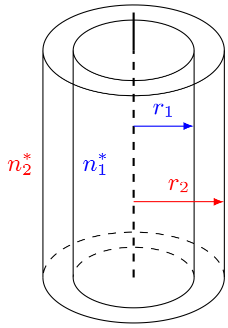


Si la diffusion se fait radialement à partir d'un axe O le long des rayons d'une sphère centrée en O, la symétrie est dite sphérique. La densité volumique de particules est invariante par rotation autour du centre O.

Dépendance spatiale de la densité volumique de particules

En symétrie sphérique, la densité volumique de particules ne dépend que de la distance au centre et du temps : $n^*_{(r,t)}$.

Cas d'une symétrie cylindrique



Si la diffusion se fait radialement à partir d'un axe $(\mathrm{O}, \vec{u})$, la symétrie est dite cylindrique. La densité volumique de particules est invariante par rotation autour de l'axe.

Dépendance spatiale de la densité volumique de particules

En symétrie cylindrique, la densité volumique de particules ne dépend que de la distance à l'axe et du temps : $n^*_{(r,t)}$.

1.3 Flux de particules

Flux

Le flux de particules à travers une surface S est le nombre de particules traversant cette surface par unité de temps :

$$\Phi = \frac{\delta N}{\mathrm{d}t}$$

avec δN la petite quantité de particules traversant la surface pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$.
Unité du flux particulaire : particules par seconde homogène à s^{-1}.

Direction et sens du flux

Le flux est dirigé des zones de faibles concentrations vers le zones de fortes concentrations, et selon des directions compatibles avec la géométrie du système.

Flux surfacique

On appelle **flux surfacique** ou densité de courant particulaire la grandeur :

$$j = \frac{\Phi}{S}$$

Unité : $\mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Application 2 : flux et flux surfacique en symétrie sphérique

Soit un flux de particules $\Phi = 3{,}0 \cdot 10^{22}\,\mathrm{s}^{-1}$ à travers une surface sphérique de rayon R. Quelle est le flux surfacique si $R = 10\,\mathrm{m}$? si $R = 10\,\mathrm{km}$?

Application 3 : flux et flux surfacique en symétrie cylindrique

Soit un flux de particules $\Phi = 3{,}0 \cdot 10^{22}\,\mathrm{s^{-1}}$ à travers une surface cylindrique de rayon R et de hauteur $H = 1\,\mathrm{m}$. Quelle est le flux surfacique si $R = 1\,\mathrm{cm}$? si $R = 10\,\mathrm{cm}$?

1.4 Loi phénoménologique de Fick

Loi de Fick

On constate expérimentalement que le flux surfacique de particules est proportionnel au taux de variation dans l'espace de la densité volumique de particules.

Symétrie axiale :

$$\boxed{j = \frac{\Phi}{S} = \pm D\,\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}x}}$$

En symétrie sphérique :

$$\boxed{j = \frac{\Phi}{S} = \pm D\,\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}}$$

En symétrie cylindrique :

$$\boxed{j = \frac{\Phi}{S} = \pm D\,\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}}$$

Justification du signe

Signe $\ominus$ si Φ est dans le sens de x ou r croissants.
Signe $\oplus$ si Φ est dans le sens de x ou r décroissants.

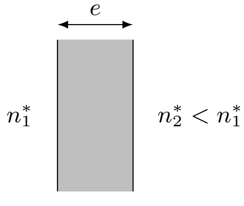
Coefficient de diffusion

Le coefficient de proportionnalité D est le **coefficient de diffusion** ou **diffusivité**, en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Ordre de grandeur du coefficient de diffusion

L'ordre de grandeur de D dépend de la phase support de la diffusion.

diffusion dans un ...	gaz	liquide	solide
D	$10^{-5}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$	$10^{-9}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$	$10^{-30}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$



Membrane biologique d'épaisseur e et de surface S, séparant un milieu de densité volumique de particules n_1^* d'un milieu de densité volumique de particules n_2^*.

Discuter de la dépendance du flux avec :

- les valeurs des densités volumiques de particules,
- la nature de la membrane,
- la géométrie de la membrane.

Influence des densités volumiques sur le flux

Influence du milieu sur le flux

Influence de la géométrie sur le flux

1.5 Durée caractéristique de la diffusion

Loi d'échelle

L'unité de D permet de postuler que la distance parcourue L et la durée τ sont reliées en ordre de grandeur par :

$$D \approx \frac{L^2}{\tau}$$

Application

Calculer la durée nécessaire à une molécule de glucose pour parcourir 1 cm dans l'eau.

Calculer la distance parcourue par une molécule d'hémoglobine dans l'eau en 1 h.

Coefficients de diffusion : $D_{\text{glucose/eau}} = 6{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D_{\text{hémoglobine/eau}} = 7{,}0 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Application 4 : vie aquatique

Évaluer la durée mise par une molécule de dioxygène pour parcourir 1 m dans l'air. Évaluer la durée mise par une molécule de dioxygène pour descendre 1 m sous la surface libre de l'eau par diffusion. Application ?

Coefficients de diffusion : $D_{\text{O}_2/\text{air}} = 1{,}9 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D_{\text{O}_2/\text{eau}} = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Application 5 : homogénéisation d'une solution

Évaluer la durée nécessaire pour qu'une solution contenue dans un bécher s'homogénéise par diffusion.

Efficacité de la diffusion

Il y a une dissymétrie de l'influence du temps et de la distance dans le phénomène de diffusion. La diffusion n'est efficace qu'à petite échelle spatiale (ou à très longue durée temporelle).

2 Bilan de particules en régime stationnaire sans source ni puits

2.1 Flux en régime stationnaire sans source ni puits

Le flux est conservatif en régime stationnaire sans source ni puits

En régime stationnaire et en l'absence de source ou de puits, le flux est conservatif : il est le même à travers toute surface normale au flux.

Démonstration en symétrie axiale (à connaitre)

Démonstration en symétrie sphérique (à connaitre)

2.2 Mise en équation du phénomène de diffusion

Méthode générale

Étape 1 : en régime stationnaire et en l'absence de source ou de puits, montrer que le flux est conservatif.
Étape 2 : écrire que la densité volumique de particules vérifie la loi de Fick :

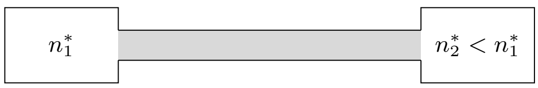
$$\frac{\Phi}{S} = -D \times \frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Phi}{S} = -D \times \frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}$$

Étape 3 : intégrer la relation précédente après avoir exprimé S.
Étape 4 : utiliser les conditions aux limites ou les grandeurs connues pour déterminer les constantes d'intégration.

2.3 Régime stationnaire en géométrie axiale

Diffusion en géométrie axiale

Soit un tube de longueur L séparant deux compartiments contenant une même espèce à des densité volumique n_1^* et $n_2^* < n_1^*$ maintenues constantes.



Profil de la densité volumique de particules dans le tube

Établir $n^*_{(x)}$ en fonction de n_1^* et Φ.

Profil de la densité volumique de particules dans le tube

Établir $n^*_{(x)}$ en fonction de n^*_1 et n^*_2.

Détermination du flux

Établir Φ en fonction de n^*_1 et n^*_2.

Application à un pore

Quel est le flux pour un pore cylindrique de diamètre $10\,\mu\text{m}$ et de longueur $1\,\text{mm}$ séparant un milieu de concentration $C_1 = 1\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'un milieu de concentration $C_2 = 0{,}4\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en une espèce diffusante de coefficient de diffusion $D = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$?

Résistance diffusive

Par analogie avec l'électricité, on définit la résistance diffusive d'un milieu :

$$R_{\text{diff}} = \frac{\Delta n^*}{\Phi}$$

Résistance diffusive en géométrie axiale

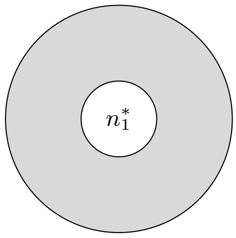
Application à un pore

Calculer la résistance diffusive du pore dont les caractéristiques sont données plus haut.

2.4 Régime stationnaire en géométrie sphérique

Diffusion en géométrie sphérique

Soit une membrane sphérique comprise entre les rayons R_1 et R_2 séparant deux compartiments contenant une espèce à la densité volumique n_1^* et $n_2^* < n_1^*$ constantes.



Profil de la densité volumique de particules

Établir $n^*_{(r)}$ en fonction de n_1^* et Φ.

Profil de la densité volumique de particules

Établir $n^*_{(r)}$ en fonction de n_1^* et n_2^*.

Détermination du flux

Établir Φ en fonction de n_1^* et n_2^*.

Application

Calculer le flux diffusé dans l'air par une sphère de rayon $R_0 = 1\,\text{cm}$ qui libère à son voisinage une espèce odorante à la densité volumique $n_0^* = 2 \cdot 10^{20}\,\text{m}^{-3}$. On donne $D = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

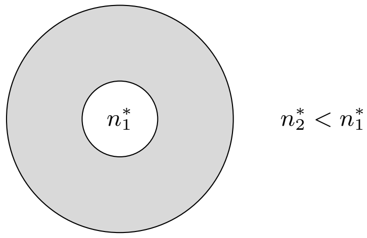
Application 6 : Résistance diffusive en géométrie sphérique

Établir l'expression de la résistance diffusive d'une membrane comprise entre deux sphères de rayons R_1 et R_2 et séparant deux milieux de densités volumiques de particules n_1^* et n_2^*.

2.5 Régime stationnaire en géométrie cylindrique

Diffusion en géométrie cylindrique

Soit une membrane cylindrique de hauteur H comprise entre les rayons R_1 et R_2 séparant deux compartiments contenant une espèce à la densité volumique n_1^* et $n_2^* < n_1^*$ constantes. On néglige les effets de bord.



Profil de la densité volumique de particules

Établir $n^*_{(r)}$ en fonction de n_1^* et Φ.

Profil de la densité volumique de particules

Établir $n^*_{(r)}$ en fonction de n_1^* et n_2^*.

Détermination du flux

Établir Φ en fonction de n_1^* et n_2^*.

Application 7 : Résistance diffusive en géométrie cylindrique

Établir l'expression de la résistance diffusive par unité de longueur de cylindre d'une membrane comprise entre deux cylindres de rayons R_1 et R_2 et séparant deux milieux de densités volumiques de particules n_1^* et n_2^*.

3 Bilan de particules en régime stationnaire avec source ou puits

3.1 Source et puits

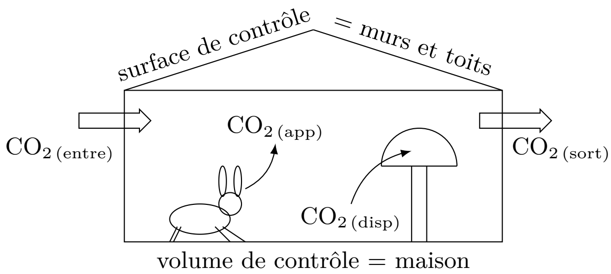
Source

On appelle **source** une zone de l'espace où il y a formation ou libération des particules diffusantes.
Exemple de source : matériau radioactif qui libère des neutrons, plantes qui libèrent du dioxygène, etc.

Puits

On appelle **puits** une zone de l'espace où il y a disparition des particules diffusantes.
Exemple de puits : matériau absorbant les neutrons, plantes qui consomment du dioxygène, roches qui fixent du dioxyde de carbone.

3.2 Bilan de particules en régime stationnaire



Bilan de particules en présence de source ou de puits en régime stationnaire

Faisons un bilan de particule dans un volume de contrôle dans lequel la densité volumique de particules est n^*. Pendant $\mathrm{d}t$:

- δN_e particules entrent par la surface de contrôle,
- δN_s particules sortent par la surface de contrôle,
- δN_app particules sont formées dans le volume de contrôle,
- δN_disp particules sont détruites dans le volume de contrôle.

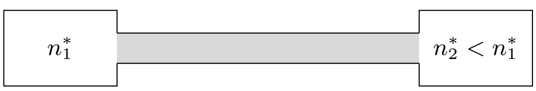
Bilan de particules en régime stationnaire :

Le flux n'est pas conservatif

En présence de terme de source ou de puits, le flux à travers des surfaces normales à la direction de diffusion n'est pas conservatif.

Mise en évidence en géométrie axiale

Quelle est la relation entre le flux à l'abscisse x et le flux à l'abscisse $x + \mathrm{d}x$, si le milieu diffusant est une source ou un puits ?



Méthode générale

Étape 1 : définir un volume de contrôle dont la géométrie est adaptée au problème. Dans le cas général, on raisonne sur un volume de contrôle infinitésimal. Dans certaines situations (seulement un flux entrant ou seulement un flux sortant), on peut raisonner sur un volume macroscopique bien choisi.
Étape 2 : faire un bilan de particules dans ce volume, en tenant compte des flux entrant et sortant, des termes de source et de puits.
Étape 3 : appliquer la loi de Fick aux termes de diffusion (flux) d'une part, et exprimer les termes de source et de puits en fonction des données d'autre part.
Étape 4 : intégrer l'équation vérifiée par n^* et utiliser les conditions à la limite.

3.3 Exemple en géométrie axiale avec terme de puits

Diffusion de dioxygène dans un milieu absorbant

On considère l'eau d'un aquarium de profondeur L, au contact de l'atmosphère ; la densité volumique de dioxygène dans l'eau à la surface est constante égale à n_0^*. L'aquarium contient des algues microscopiques uniformément réparties qui consomment le dioxygène avec un taux volumique A (en $\mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{-1}$). On se place en régime stationnaire.

Faire un bilan sur une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$.
Déterminer la loi d'évolution de $n^*_{(x)}$, où x est la profondeur, en introduisant $n_{(L)}$ la densité volumique de dioxygène au fond de l'aquarium. En déduire l'expression du flux $\Phi_{(x)}$.

Que dire de $n^*_{(L)}$ et $\Phi_{(L)}$ s'il y a du dioxygène jusqu'au fond ?
Déterminer la valeur maximale que doit avoir A si on veut qu'il y ait du dioxygène jusqu'au fond de l'aquarium.

3.4 Exemple en géométrie sphérique avec terme de source

Diffusion de neutrons dans un milieu émetteur de neutrons

On considère une sphère de rayon R_0 contenant un matériau radioactif qui émet des neutrons avec un taux volumique A uniforme dans tout le volume. En dehors de la sphère, les neutrons diffusent librement jusqu'à l'infini. On se place en régime stationnaire.

Déterminer le flux de neutrons sortant de la sphère.

Déterminer la densité volumique de neutrons à l'extérieur de la sphère, en utilisant une condition à la limite plausible. En déduire la densité volumique de neutrons n_0^* en $r = R_0$.

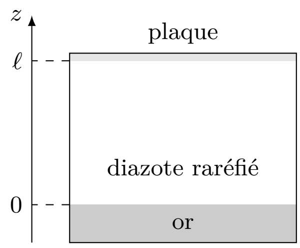
Déterminer le profil de la densité volumique de neutrons dans la sphère.

Exercices

Exercice 1 : déposition physique en phase vapeur

La déposition physique en phase vapeur est un moyen de réaliser des dépôts très minces et très réguliers sur une plaque, par exemple une mince couche d'or sur un circuit imprimé utilisé en électronique. Le principe est le suivant : de l'or présent au fond d'une enceinte de section $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ est évaporé par chauffage. La vapeur d'or diffuse et se dépose sur une plaque située en haut de la cuve à une distance $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ du fond.

On étudie la densité particulaire de la vapeur d'or n^* dans le gaz raréfié une fois le régime stationnaire atteint. On définit un vecteur unitaire vertical $\vec{u}_z$ dirigé vers le haut, et on compte l'altitude à partir de la surface de l'or métallique.



1. En supposant que la pression de la vapeur d'or est égale à sa pression de vapeur saturante à la surface du solide, exprimer la concentration particulaire de l'or en phase gazeuse à l'altitude $z = 0$. Que vaut-elle à 298 K ? Quelle est la concentration particulaire en $z = \ell$?
2. Quelle est la symétrie du problème ? Préciser :
- la direction et le sens du flux Φ de la vapeur d'or,
- le(s) paramètre(s) dont dépend la densité particulaire n^*.

3. Montrer que le flux est conservatif.
4. Établir le profil de la densité particulaire en fonction de l'altitude $n^*_{(z)}$.
5. Établir l'expression de la résistance diffusive entre le haut et le bas de l'enceinte. Calculer sa valeur numérique à 298 K.
6. Calculer numériquement le flux particulaire de la vapeur d'or. En déduire le temps nécessaire pour déposer une couche de 100 µm d'or sur la surface supérieure de l'enceinte.
7. Proposer une explication au fait qu'on opère généralement à température élevée.

Numéro atomique	$Z = 79$
Masse atomique	$M = 199{,}97\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
Masse volumique	$\rho = 19{,}3\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$
Pression de vapeur saturante à 298 K	$P^{\,\mathrm{sat}} = 0{,}237\,\mathrm{mPa}$
Coefficient de diffusion dans l'air à 298 K	$D \approx 0{,}1\,\mathrm{cm^2\cdot s^{-1}}$

Table 1 – Données relatives à l'or.

Exercice 2 : diffusion à travers une membrane

Une membrane est percée de pores cylindriques identiques de longueur L et de rayon r. La membrane sépare deux compartiments contenant deux solutions aqueuses de glucose de concentrations moléculaires C_1 et $C_2 < C_1$ constantes. Les pores sont remplis d'eau supposée immobile, et laissent passer les molécules de glucose par diffusion. Le coefficient de diffusion du glucose dans un pore est noté D. On se place en régime stationnaire.

1. Quel est la direction et le sens du flux ? Quelle est la géométrie du transport ?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de glucose dans un pore. En déduire le profil de la densité volumique de glucose dans un pore.
3. Déterminer le flux de glucose dans un pore, en fonction des données.

On définit la perméabilité K de la membrane séparant les deux compartiments de concentration C_1 et C_2 par :

$$\frac{\Phi_{\text{tot}}}{S} = K \times (C_1 - C_2)$$

où Φ_{tot} est le flux total de glucose à travers la membrane, et S la section totale de la membrane.

4. Exprimer K en fonction de D, L, r et de la densité n de pores (nombre de pores par unité de surface). Faire l'application numérique.

$L = 10\,\mu\mathrm{m}$
$r = 0{,}56\,\mu\mathrm{m}$
$D = 1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$n = 1 \cdot 10^{6}\,\mathrm{cm}^{-2}$

Exercice 3 : diffusion de neutrons en géométrie cylindrique

On étudie l'émission de neutrons par un « crayon » contenu dans le cœur d'une centrale nucléaire. Il s'agit d'un cyclindre de rayon R_0 et de hauteur H contenant le matériau radioactif. On suppose que l'émission de neutron a lieu uniquement de façon radiale, et on appelle n_0^* la densité volumique de neutrons dans l'air environnant à $r = R_0$. Une fois émis, les neutrons diffusent dans l'air avec un coefficient de diffusion D, et on suppose qu'il n'y a quasiment aucune absorption.

1. Rappeler de quel paramètre dépend le flux. Montrer qu'il est conservatif.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de neutrons. En déduire la loi $n^*_{(r)}$, en fonction de Φ, n_0^*, D, H, R_0 et r.
3. Analyser ce qui se passe lorsque $r \to \infty$. Commenter.
4. Exprimer le rayon R_1 pour lequel la densité volumique de neutrons est 100 fois plus faible qu'à R_0, en fonction des paramètres géométriques du problème et du flux.

Exercice 4 : piège à phéromone

Un moyen de lutte « écologique » contre les insectes est l'utilisation de piège à phéromone. On trouve dans le commerce des pièges à carpocapse, un papillon qui pond dans les fleurs de pommier. Il s'agit d'une boulette qui émet des phéromones de sorte à attirer les carpocapses vers une boite conçue comme une nasse (une fois dans la boite, l'insecte se noie).

La boite avec la boulette est accrochée en hauteur sur un arbre. On appelle r la distance à la boulette, et $n^*_{(r)}$ la densité particulaire de la phéromone. Le rayon de la boulette émettrice est $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$. On se place en régime stationnaire.

1. En considérant que le phénomène d'évaporation de la phéromone est à l'équilibre, évaluer n_1^*, concentration particulaire au niveau de la surface de la boulette.
2. Quelle est la symétrie du problème ? De quel paramètre n^* dépend-elle ? Préciser la direction et le sens du flux Φ de phéromones.
3. Établir l'expression de la densité particulaire en fonction de la distance r. Représenter schématiquement $n^*_{(r)}$.

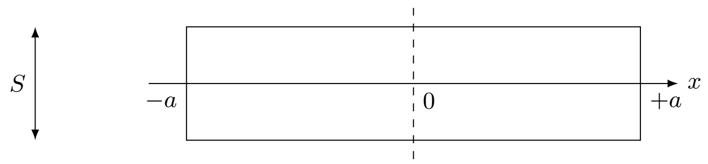
Les papillons peuvent détecter des concentrations particulaires de 200 molécules par cm^3, et on souhaite que le piège attire les papillons jusqu'à une distance de $2\,\mathrm{m}$.

4. Évaluer l'ordre de grandeur du flux particulaire de phéromones.
5. En déduire un ordre de grandeur de la quantité de phéromones que le fabricant doit inclure dans la boulette pour que celle-ci reste active durant 3 semaines.

Pression de vapeur saturante de la phéromone à $25\,°\mathrm{C}$: $P^{\,\mathrm{sat}} \approx 50\,\mathrm{Pa}$
Coefficient de diffusion dans l'air : $D \approx 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

Exercice 5 : réaction photochimique

Dans cet exercice, on étudie un modèle sommaire de réaction photochimique. Par une irradiation lumineuse dans un milieu contenant des molécules de dichlore Cl_2, on produit des atomes de chlore $Cl^\bullet$ avec un taux volumique A uniforme dans tout le récipient. Les atomes de chlore diffusent dans le milieu avec un coefficient de diffusion D. Le récipient est de section verticale rectangulaire S, et les atomes de chlore sont intégralement absorbés au niveau de deux parois opposées d'abscisse $x = \pm a$ par rapport au centre du récipient. On se place dans l'hypothèse simplificatrice où la diffusion n'a lieu que dans la direction x et en régime stationnaire.



1. Que vaut la densité volumique n^* des atomes de chlore en $x = +a$ et $x = -a$?
2. Écrire un bilan d'atomes de chlore dans un tranche de section S comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.
3. En déduire l'expression de $n^*_{(x)}$ en fonction de A, de D et de a. Représenter graphiquement $n^*_{(x)}$. Où la densité est-elle maximale ?
4. Exprimer le flux Φ à l'abscisse x et déterminer son sens.

Exercice 6 : diffusion radiale de neutrons avec capture

On considère une sphère de rayon R_0 contenant un matériau radioactif qui émet des neutrons avec un taux volumique A constant. Le flux total émis par la sphère vers l'extérieur à $r = R_0$ est Φ_0. On se place en régime stationnaire.

1. En faisant un bilan sur la sphère entière, exprimer le flux Φ_0 en fonction de A et de R_0.

On s'intéresse à la densité de neutrons à l'intérieur de la sphère, constituée d'un milieu dans lequelle le coefficient de diffusion des neutrons est D_1.

2. À l'aide d'un bilan sur une sphère de volume $r < R_0$, établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de neutrons n^*.
3. En déduire l'expression de n^* en fonction de n^*_0, valeur de la densité volumique de neutrons en $r = R_0$, et des autres paramètres du problème.

On s'intéresse maintenant à la diffusion des neutrons à l'extérieur de la sphère, qui est un milieu non absorbant dans lequel les neutrons diffusent avec un coefficient de diffusion D_2.

4. Que dire du flux dans le milieu extérieur ?
5. Établir l'expression de la densité volumique de neutrons en fonction de r pour $r > R_0$, en fonction de n^*_0.
6. En déduire n^*_0, en supposant que la diffusion a lieu jusqu'à l'infini.

On suppose maintenant que le milieu extérieur à la sphère absorbe les neutrons avec un taux volumique d'absorption K uniforme.

7. À l'aide d'un bilan entre deux sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$, montrer que la densité volumique de neutrons pour $r > R_0$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 \times \frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{K}{D} \times r^2$$

Expliquer comment on peut en déduire le profil de densité volumique de neutrons (on ne demande pas de faire le calcul).

8. En déduire l'expression du flux en fonction de r, connaissant Φ_0.
9. Déterminer la distance à laquelle la totalité des neutrons émis est absorbée.

Travaux dirigés

Exercice 1 : taille maximale d'une bactérie

On considère une bactérie sphérique de rayon R, de masse volumique ρ, de centre O, immobile dans de l'eau à la température ambiante. La bactérie respire et consomme du dioxygène avec un taux molaire horaire par unité de masse A.

1. Exprimer la quantité δN_{cons} de molécules de dioxygène consommée par la bactérie pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, en fonction de son rayon R.

On suppose que la bactérie est la seule source de consommation de dioxygène. Soit C_0 la concentration molaire du dioxygène dans l'eau loin de la bactérie et D son coefficient de diffusion dans l'eau.

2. Préciser la symétrie du problème et préciser de quel paramètre dépend la concentration molaire en dioxyène dans l'eau. Selon quelle direction et dans quel sens est le flux de dioxygène ? Quelle est sa cause ?
3. Montrer que le flux Φ est conservatif à travers des surfaces bien choisies. Que vaut-il en régime stationnaire ?
4. Écrire la loi de Fick, en prenant bien garde au signe !
5. Montrer que la densité volumique de molécules de dioxygène dans l'eau varie selon la loi :

$$n^*_{(r)} = C_0 \mathcal{N}_{\mathrm{A}} - \frac{\Phi}{4\pi D r}$$

6. À quelle condition sur $n^*_{(R)}$ la bactérie ne meurt-elle pas d'asphyxie ?
7. En déduire que la bactérie possède un rayon critique au-delà duquel sa survie n'est pas possible. Calculer sa valeur numérique et commenter.

$\rho \approx 1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$C_0 \approx 0{,}2\,\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$
$D \approx 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$	$A = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}}$

Exercice 2 : diffusion de neutrons dans un milieu absorbant

Il a été établi que dans le gisement d'uranium d'Oklo, au Gabon, un réacteur nucléaire naturel a fonctionné il y a environ 2 milliards d'années. Le processus de désintégration radioactive de l'uranium 235 libère des neutrons, dont on étudie la diffusion supposée se dérouler dans une direction repérée par un vecteur unitaire $\vec{u}_x$, le long d'un cylindre de section S constante.

On appelle $n^*_{(x)}$ la concentration de neutrons à l'abscisse x. Dans un milieu géologique donné, le coefficient de diffusion des neutrons, noté D, est supposé constant. On se place en régime stationnaire.

1. À l'aide d'un bilan sur une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, établir l'équation différentielle vérifiée par $n^*_{(x)}$ dans un milieu sans source ni puits.

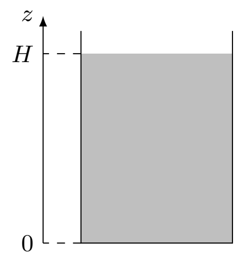
Dans le gisement d'Oklo, des couches riches en uranium alternent avec des couches dépourvues d'uranium et riches en eau infiltrée, chaque couche étant d'épaisseur de l'ordre du mètre. L'eau a la propriété d'absorber les neutrons. On s'intéresse au devenir des neutrons lorsqu'ils pénètrent dans une couche riche en eau. Pour ce faire, on considère un volume élémentaire de section S et compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, et on note C la fraction de neutrons absorbés par unité de temps. La propagation se fait toujours rectilignement selon la direction $\vec{u}_x$ avec un coefficient de diffusion D (qui n'est pas le même que dans le filon d'uranium).

2. Faire un bilan du nombre de neutrons dans le volume de contrôle pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n^*_{(x)}$. Montrer qu'il apparait une longueur caractéristique λ.
3. Établir la loi donnant $n^*_{(x)}$. Déterminer les constantes d'intégration en fonction de n^*_0 la concentration particulaire à l'abscisse nulle, prise à l'interface entre le filon d'uranium et le filon riche en eau, et d'une condition de non divergence.
4. Exprimer, en fonction de C et D, la *longueur de diffusion* L_{D}, définie comme la distance parcourue par les neutrons au bout de laquelle leur nombre est divisé par e. Celle-ci dépend-elle de x ?

Rappel mathématique : $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - K^2 \times f = 0 \Rightarrow f = A \times \mathrm{e}^{-x/K} + B \times \mathrm{e}^{+x/K}$, avec A et B deux constantes.

Exercice 3 : sédimentation

On considère de l'eau liquide de masse volumique ρ_0 dans lequel des petites particules solides sont en suspension. Ces particules sont assimilées à des sphères de rayon R, de masse m, et on note ρ leur masse volumique. À la date initiale, la solution est fortement agitée, de sorte que les particules se répartissent dans le liquide de façon homogène. On laisse alors les particules se déposer au fond du récipient, de section horizontale S, sous l'action de la pesanteur. On appelle H la hauteur de l'eau dans le récipient.



Dans un premier temps, on fait l'étude mécanique du mouvement d'une particule. On suppose que la vitesse est lente, et que les particules sont soumises à une force de frottement visqueux proportionnelle à leur vitesse : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.

1. Faire l'inventaire des forces auxquelles une particule est soumise.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. En déduire la vitesse limite $\vec{v}_\ell$ d'une particule, ainsi que la durée nécessaire à une particule pour atteindre cette vitesse.
4. Déterminer la durée de chute Δt d'une particules initialement située à la surface du liquide.
5. Faire l'application numérique pour des particules de rayon $R = 0{,}1\,\mu\text{m}$, sachant que $\alpha = 6\pi\eta_0 R$, où η_0 est la visosité dynamique de l'eau.

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique de l'eau : $\eta_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$
Masse volumique des particules : $\rho = 2{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Hauteur de liquide : $H = 10\,\text{cm}$

Le mouvement des particules vers le bas entraine une inhomogénéité de leur densité. Il résulte alors un phénomène de transport par diffusion.

6. Dans quel sens la diffusion a-t-elle lieu ? Comparer avec le phénomène de sédimentation.

On s'intéresse au flux de particules dû à la sédimentation. On considère une surface (S) horizontale à l'altitude z, à laquelle la densité volumique de particule est $n^*_{(z)}$. On suppose que les particules ont toutes atteint leur vitesse limite.

7. En considérant uniquement le mouvement dû à la sédimentation, préciser le volume dans lequel se trouvent les particules qui franchissent la surface (S) pendant l'intervalle de temps dt.
8. En déduire l'expression du nombre de particules qui franchissent la surface (S) sous l'effet de la sédimentation pendant dt, puis le flux Φ_s de sédimentation.

À travers la même surface (S), il existe également un flux de particules dû à la diffusion. La relation d'Einstein lie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement visqueux α : $D = k_\text{B}T/\alpha$, avec $k_\text{B} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

9. Exprimer le flux diffusif Φ_d correspondant à la diffusion des particules.
10. En régime stationnaire, que dire des flux Φ_s et Φ_d ? En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de particules.
11. Établir la loi de répartition verticale de particules $n^*_{(z)}$.
12. Sachant que des mesures optiques permettent de mesurer que $n^*_{(2\,\text{cm})}/n^*_{(0\,\text{cm})} = 1/2$ à la température de 298 K, déterminer la masse et le rayon des particules.